Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II **Secondo appello – 1° Settembre 2017**

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

Es.1: 4 punti	**Es.2**: 6 punti	**Es.3**: 9 punti	**Es.4**: 14 punti	**Totale**

1. Se converge, determinare il valore della serie
$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^n + 3^n}{4^{n+1}}\,.$$

2. Determinare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 0 \\ y'(\pi/4) = -\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\pi/2} \\ y(\pi/4) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\pi/2}\,. \end{cases}$$

3. Sia f la funzione definita da
$$f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)\,.$$
   (a) Determinare il dominio e il segno di f.
   (b) Determinare i punti di massimo e minimo liberi di f.
   (c) Determinare i punti di massimo e minimo assoluti di f nella regione
$$\Omega = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 8\,\}\,.$$

4. (a) Sia Σ la superficie definita dalle condizioni $x^2 + y^2 = r^2$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq h$, dove $r, h \in \mathbb{R}$, $r, h > 0$.
      i. Descrivere la superficie Σ e mostrare che è orientabile.
      ii. Determinare il bordo γ di Σ e disegnarlo.
      iii. Determinare l'orientazione di γ coerente con l'orientazione di Σ indotta dai versori normali la cui proiezione ortogonale sull'asse y è diretta come e_2.
   (b) Stabilire se i campi $\mathbf{F} = (yz + \mathrm{e}^x, xz + \mathrm{e}^y, xy + \mathrm{e}^z)$ e $\mathbf{G} = (z^2, x^2, y^2)$ sono conservativi in $\mathbb{R}^3$.
   (c) Determinare una funzione potenziale degli eventuali campi conservati trovati nel punto precedente.
   (d) Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F}$ lungo la curva regolare
$$\Gamma : \begin{cases} x = 3\sin\theta + \cos\theta \\ y = 2\sin\theta + \cos\theta \\ z = 4\sin\theta - \cos\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0,\pi]\,.$$
   (e) Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{H} = 3\mathbf{F} + \mathbf{G}$ lungo la curva $\gamma = \partial\Sigma$, orientata come nel punto (a).
   (f) Calcolare il flusso del campo G attraverso la sfera S di centro $O \equiv (0,0,0)$ e raggio $r = 1$, orientata verso l'esterno.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

Soluzioni

1. Il termine generale della serie è

$$a_n = \frac{2^n + 3^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n .$$

Poiché $0 < \frac{1}{2} < 1$ e $0 < \frac{3}{4} < 1$, le serie geometriche

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n\geq 1}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

sono convergenti. Quindi, per linearità, anche la serie di partenza è convergente e

$$\sum_{n\geq 1}\frac{2^n + 3^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-1/2} - 1\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-3/4} - 1\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 .$$

2. L'equazione differenziale data è lineare omogenea a coefficienti costanti. Di conseguenza, il problema di Cauchy associato ammette esattamente una soluzione (definita su tutto $\mathbb{R}$). L'equazione caratteristica è $\lambda'' - 4\lambda + 5 = 0$ e ha radici $\lambda_{1,2} = 2 \pm \mathrm{i}$. Quindi la soluzione generale è

$$y(x) = A\mathrm{e}^{2x}\cos x + B\mathrm{e}^{2x}\sin x \qquad A, B \in \mathbb{R} .$$

Poiché

$$y'(x) = (2A + B)\mathrm{e}^{2x}\cos x + (2B - A)\mathrm{e}^{2x}\sin x ,$$

imponendo le condizioni iniziali, si ha

$$\begin{cases} A\frac{\mathrm{e}^{\pi/2}}{\sqrt{2}} + B\frac{\mathrm{e}^{\pi/2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\pi/2} \\ (2A + B)\frac{\mathrm{e}^{\pi/2}}{\sqrt{2}} + (2B - A)\frac{\mathrm{e}^{\pi/2}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\pi/2} \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ A + 3B = -2 \end{cases}$$

da cui si ricava immediatamente $A = 4$ e $B = -2$. Pertanto, la soluzione cercata è

$$y(x) = 4\mathrm{e}^{2x}\cos x - 2\mathrm{e}^{2x}\sin x .$$

3. (a) Poiché $1 + x^2 + y^2 > 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il dominio di f è tutto il piano $\mathbb{R}^2$. Inoltre, poiché $1 + x^2 + y^2 \geq 1$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si ha $f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   (b) La funzione f è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Pertanto, i punti di massimo e minimo liberi possono essere cercati solo tra i punti critici, ossia tra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} \dfrac{2x}{1 + x^2 + y^2} = 0 \\ \dfrac{2y}{1 + x^2 + y^2} = 0 . \end{cases}$$

   Si ha solo un punto critico, dato da $O \equiv (0, 0)$. Poiché $f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $f(0, 0) = 0$, si ha che O è un punto di minimo assoluto.

   (c) L'insieme Ω è il disco chiuso di centro $C \equiv (1, 1)$ e raggio $r = 2\sqrt{2}$, e pertanto è un insieme compatto (chiuso e limitato) di $\mathbb{R}^3$. Essendo continua su Ω, la funzione f possiede massimo e minimo assoluti su Ω (per il teorema di Weierstrass). Il punto O appartiene a Ω e quindi (per quanto osservato nel punto precedente) in O si ha il minimo assoluto. Poiché all'interno di Ω non ci sono altri punti critici di f, la funzione f assumerà il suo valore massimo assoluto in Ω lungo il bordo γ di Ω. Si tratta quindi di cercare i punti di massimo e di minimo di f vincolati a γ. Il vincolo γ è la circonferenza di equazione $g(x, y) = 0$, dove $g(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 8$.

Poiché $\nabla g(x,y) = (2(x-1), 2(y-1))$, si ha $\nabla g(x,y) \neq \mathbf{0}$ per ogni $(x,y) \in \gamma$, ossia γ è una curva regolare. Poiché la funzione f è di classe $\mathcal{C}^1$, i punti di massimo e di minimo vincolati vanno cercati tra i punti critici di f vincolati a γ, ossia tra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y)g_y(x,y) - f_y(x,y)g_x(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} \dfrac{4x(y-1)}{1+x^2+y^2} - \dfrac{4y(x-1)}{1+x^2+y^2} = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \end{cases}$$

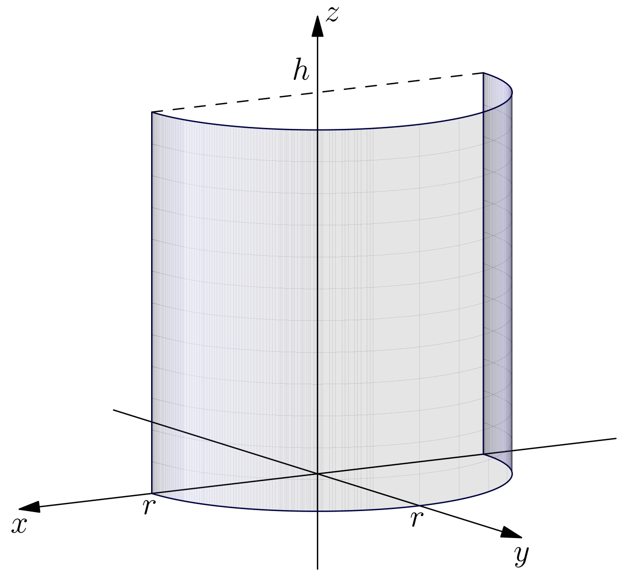
ossia

$$\begin{cases} y = x \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8\,. \end{cases}$$

Pertanto, dalla seconda equazione si ha $2(x-1)^2 = 8$, ossia $(x-1)^2 = 4$, ossia $x - 1 = \pm 2$, da cui si ha $x = 3$ oppure $x = -1$. Poiché $f(3,3) = \ln 19$ e $f(-1,-1) = \ln 3$, si ha che $(3,3)$ è un punto di massimo vincolato e $(-1,-1)$ è un punto di minimo vincolato.

In conclusione, la funzione f assume valore minimo assoluto 0 nel punto $O \equiv (0,0)$ e assume valore massimo assoluto $\ln 19$ nel punto $M \equiv (3,3)$.

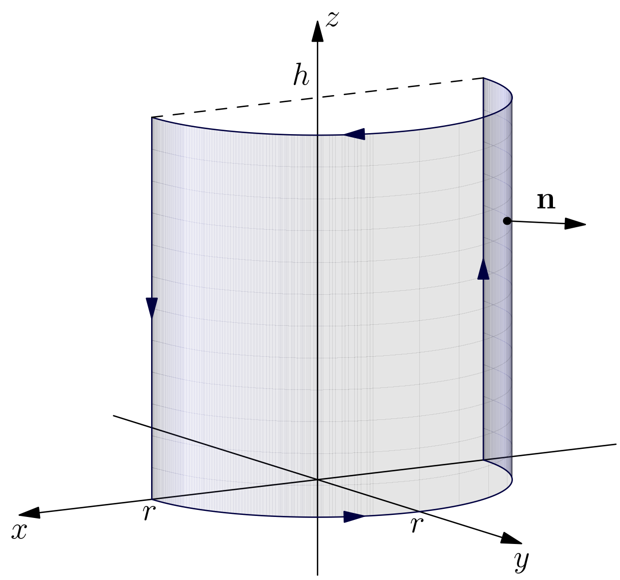
4. (a) i. La superficie Σ è la porzione del cilindro circolare retto $C : x^2 + y^2 = r^2$ (avente l'asse z per asse e avente raggio r) contenuta nel primo e secondo ottante ($y, z \geq 0$) e compresa tra i piani orizzontali $\pi_1 : z = 0$ e $\pi_2 : z = h$.



Essendo una porzione di cilindro, la superficie Σ è orientabile.

ii. Il bordo γ di Σ è una curva regolare a tratti composta (come si vede nella figura precedente) dalla semicirconferenza di centro $O \equiv (0,0,0)$ e raggio r che va dal punto $(r,0,0)$ al punto $(-r,0,0)$, dal segmento che va dal punto $(-r,0,0)$ al punto $(-r,0,h)$, dalla semicirconferenza di centro $O \equiv (0,0,h)$ e raggio r che va dal punto $(-r,0,h)$ al punto $(r,0,h)$ e dal segmento che va dal $(r,0,h)$ al punto $(r,0,0)$.

iii. L'orientazione di γ richiesta si ottiene utilizzando la regola della mano destra (in modo che sia *antioraria* rispetto al generico versore normale $\mathbf{n}$). È pertanto l'orientazione che si ottiene percorrendo γ nel modo descritto nel punto precedente, ossia come nella seguente figura:



(b) I campi $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ sono di classe $\mathcal{C}^1$ su $\mathbb{R}^3$. Inoltre, si ha

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz + \mathrm{e}^x & xz + \mathrm{e}^y & xy + \mathrm{e}^z \end{vmatrix} = (x - x, -y + y, z - z) = \mathbf{0}$$

e

$$\operatorname{rot}\mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix} = (2y, 2z, 2x)\,.$$

Poiché $\mathbf{F}$ è irrotazionale su $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^3$ è semplicemente connesso, il campo $\mathbf{F}$ è conservativo. Poiché $\mathbf{G}$ non è irrotazionale, $\mathbf{G}$ non è nemmeno conservativo.

(c) Il potenziale del campo $\mathbf{F}$, che si annulla nel punto $O \equiv (0,0,0)$, è dato dalla funzione

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \int_0^x F_1(t,0,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^y F_2(x,t,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^z F_1(x,y,t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + \int_0^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + \int_0^z (xy + \mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\mathrm{e}^t\right]_0^x + \left[\mathrm{e}^t\right]_0^y + \left[xyt + \mathrm{e}^t\right]_0^z \\ &= \mathrm{e}^x - 1 + \mathrm{e}^y - 1 + xyz + \mathrm{e}^z - 1 \\ &= xyz + \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^z - 3\,. \end{aligned}$$

(d) Poiché è conservativo, il lavoro del campo $\mathbf{F}$ dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale, ma non dal cammino che si percorre. In questo caso, il punto iniziale di Γ si ottiene per $\theta = 0$ ed è $P \equiv (1,1,-1)$, mentre il punto finale di Γ si ottiene per $\theta = \pi$ ed è $Q \equiv (-1,-1,1)$. Pertanto, il lavoro richiesto è

$$L_\Gamma(\mathbf{F}) = L(P \to Q) = U(Q) - U(P) = 1 + 2\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e} - 3 - (-1 + \mathrm{e}^{-1} + 2\mathrm{e} - 3) = 2 + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}\,.$$

(e) Per la linearità del lavoro, si ha

$$L_\gamma(\mathbf{H}) = L_\gamma(3\mathbf{F} + \mathbf{G}) = 3L_\gamma(\mathbf{F}) + L_\gamma(\mathbf{G})\,.$$

Poiché $\mathbf{F}$ è un campo conservativo, il suo lavoro lungo una qualunque curva chiusa è nullo. Quindi, essendo γ una curva chiusa, si ha $L_\gamma(\mathbf{F}) = 0$ e quindi

$$L_\gamma(\mathbf{H}) = L_\gamma(\mathbf{G})\,.$$

Poiché $\mathbf{G}$ è un campo di classe $\mathcal{C}^1$ su $\mathbb{R}^3$ e $\gamma = \partial\Sigma$, dove

$$\Sigma : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \theta \in [0,\pi] \\ t \in [0,h]\,, \end{array}$$

è una superficie regolare semplice di classe $\mathcal{C}^2$, possiamo usare il teorema di Stokes:

$$L_\gamma(\mathbf{G}) = \iint_\Sigma \langle \operatorname{rot}\mathbf{G}, \mathbf{n}\rangle \,\mathrm{d}\sigma$$

dove $\mathbf{n}$ è il campo dei versori normali a Σ che ne determina l'orientazione. Poiché il vettore normale è $\mathbf{N} = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$, l'orientazione di Σ è quella indotta da $\mathbf{N}$ e quindi

$$L_\gamma(\mathbf{G}) = \int_0^\pi \int_0^h \langle \operatorname{rot}\mathbf{G}, \mathbf{N}\rangle \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t\,.$$

Poiché

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{rot}\mathbf{G}, \mathbf{N}\rangle &= \langle (2y, 2z, 2x), (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)\rangle \\ &= \langle (2r\sin\theta, 2t, 2r\cos\theta), (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)\rangle \\ &= 2r^2\sin\theta\cos\theta + 2rt\sin\theta \\ &= r^2\sin 2\theta + 2rt\sin\theta\,, \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} L_\gamma(\mathbf{G}) &= \int_0^\pi \int_0^h (r^2\sin 2\theta + 2rt\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \left[\int_0^h (r^2\sin 2\theta + 2rt\sin\theta)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi \left[r^2 t\sin 2\theta + rt^2\sin\theta\right]_0^h \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi (r^2 h\sin 2\theta + rh^2\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \left[-\frac{r^2 h}{2}\cos 2\theta - rh^2\cos\theta\right]_0^\pi \\ &= -\frac{r^2 h}{2} + rh^2 + \frac{r^2 h}{2} + rh^2 \\ &= 2h^2 r\,. \end{aligned}$$

In conclusione, si ha $L_\gamma(\mathbf{H}) = 2h^2 r$.

(f) Poiché il campo $\mathbf{G}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ su $\mathbb{R}^3$ e S è una superficie regolare semplice chiusa, possiamo utilizzare il teorema della divergenza:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{G}) = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{G}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

dove Ω è la regione delimitata dalla sfera S. Poiché

$$\operatorname{div}\mathbf{G} = \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} = 0\,,$$

si ha $\Phi_\Sigma(\mathbf{G}) = 0$.