Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — **Terzo appello – 12 Febbraio 2018**

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

Es.1: 7 punti	**Es.2**: 7 punti	**Es.3**: 7 punti	**Es.4**: 12 punti	**Totale**

1. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = 3x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\sqrt[3]{y} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$
e determinare il più ampio intervallo di $\mathbb{R}$ su cui tale soluzione può essere definita.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$
   (a) Stabilire se f è continua in $\mathbf{0} = (0,0)$.
   (b) Stabilire se f è derivabile in $\mathbf{0}$.
   (c) Stabilire se $\mathbf{0}$ è un punto critico di f.
   (d) Stabilire se $\mathbf{0}$ è un punto di minimo assoluto di f.
   (e) Stabilire se f è differenziabile in $\mathbf{0}$.

3. Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F} = (y + x^2 - y^2, x + x^2y^2)$ lungo la curva $\gamma = \partial\Omega$, orientata positivamente, dove
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\,,\ y \leq |x|\}\,.$$

4. (a) Sia Σ la superficie definita dalle condizioni $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $x, y \geq 0$, $0 \leq z \leq r/\sqrt{2}$, dove $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.
      i. Descrivere la superficie Σ e mostrare che è orientabile.
      ii. Determinare il bordo γ di Σ e disegnarlo.
      iii. Determinare l'orientazione di γ coerente con l'orientazione di Σ indotta dai versori normali la cui proiezione ortogonale sulla bisettrice del piano xy ha il verso del vettore $(1,1,0)$.
   (b) Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F} = (x^2 + yz, y^2 + xz, z^2 + xy)$ lungo la curva $\gamma = \partial\Sigma$, orientata come nel punto (a).
   (c) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{G} = (x + yz, y - 2xz, z + xy)$ attraverso Σ, orientata come nel punto (a).

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

Soluzioni

1. L'equazione differenziale data è a variabili separabili. Si ha una sola soluzione singolare, data da $y(x) = 0$. Separando le variabili e integrando, si ha
$$\int y^{-1/3} \mathrm{d}y = 3 \int x\, \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x$$
ossia
$$\frac{3}{2}\, y^{2/3} = -\frac{3}{2}\, \mathrm{e}^{-x^2} + k \qquad (k \in \mathbb{R})$$
ossia
$$y^{2/3} = -\mathrm{e}^{-x^2} + c \qquad \left(c \in \mathbb{R}, c = \frac{2}{3}\, k\right)$$
da cui si ottiene l'integrale generale
$$y(x) = \pm\sqrt{(c - \mathrm{e}^{-x^2})^3} \qquad (c \in \mathbb{R}).$$
Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -1$, si ha $-1 = -\sqrt{(c-1)^3}$, ossia $1 = (c-1)^3$, ossia $c = 2$. La soluzione cercata è quindi
$$y(x) = -\sqrt{(2 - \mathrm{e}^{-x^2})^3}\,.$$
Questa funzione esiste quando $2 - \mathrm{e}^{-x^2} \geq 0$, ossia $\mathrm{e}^{-x^2} \leq 2$, ossia $x^2 \geq -\ln 2$. Quest'ultima condizione è sempre verificata, pocihè $x^2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $-\ln 2 < 0$ (si verifica facilmente che $\mathrm{e}^{-x^2} \leq 1$, per ogni $x \in \mathbb{R}$). Tale funzione, inoltre, è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ ($2 - \mathrm{e}^{-x^2}$ non si annulla mai). In conclusione, la soluzione trovata risulta definita su tutto $\mathbb{R}$.

2. (a) Consideriamo la generica retta di equazione $y = mx$, passante per l'origine. Allora, si ha
$$f(x, mx) = \frac{|x| + |mx|}{\sqrt{x^2 + m^2x^2}} = \frac{(1 + |m|)|x|}{|x|\sqrt{1+m^2}} = \frac{1+|m|}{\sqrt{1+m^2}}$$
e
$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \frac{1+|m|}{\sqrt{1+m^2}}\,.$$
Poiché il valore di questo limite dipende dal parametro m, il limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$
non esiste e di conseguenza non si ha
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)\,.$$
Quindi, la funzione f non è continua in $(0,0)$.

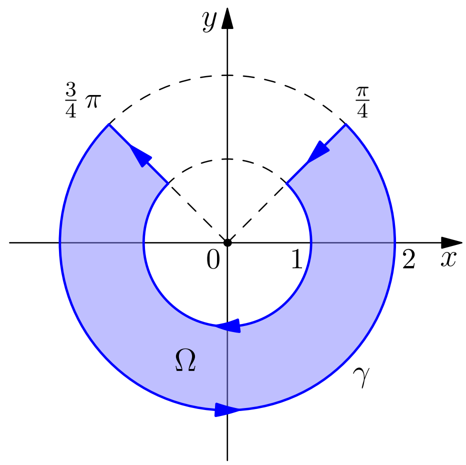
   (b) Poiché il limite
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$
non esiste, la funzione f non è derivabile parzialmente rispetto a x in $\mathbf{0}$. Analogamente, per simmetria, la funzione f non è nemmeno derivabile parzialmente rispetto a y in $\mathbf{0}$.

   (c) Poiché f non è derivabile in $\mathbf{0}$, tale punto non è un punto critico di f.

   (d) Poiché $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $f(0,0) = 0$, si ha che $\mathbf{0}$ è un punto di minimo assoluto di f.

   (e) Non essendo continua in $\mathbf{0}$, la funzione f non può essere differenziabile in $\mathbf{0}$.

3. Il campo $\mathbf{F}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ su $\mathbb{R}^2$ e l'insieme Ω è regolare (ossia unione finita di insiemi semplici), come si vede dalla figura seguente:



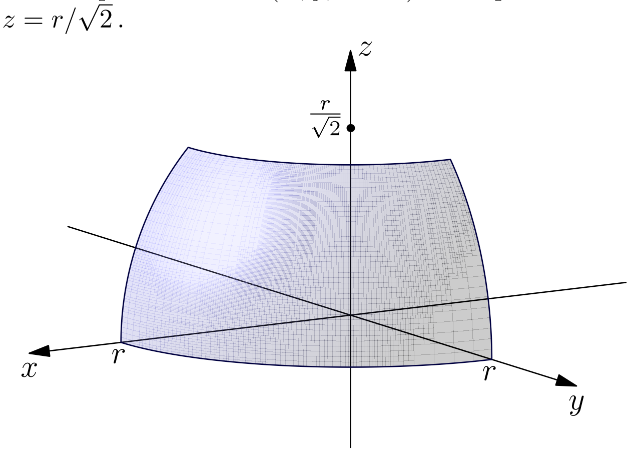
Pertanto, per calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo $\gamma = \partial\Omega$ possiamo utilizzare il teorema di Gauss-Green, per il quale si ha

$$L_\gamma(\mathbf{F}) = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega \left(2xy^2 + 2y\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Passando in coordinate polari, l'insieme Ω è descritto dalle condizioni $1 \le \rho \le 2$ e $\frac{3}{4}\pi \le \theta \le \frac{9}{4}\pi$. Quindi, si ha

$$\begin{aligned} L_\gamma(\mathbf{F}) &= \int_1^2 \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} \left(2\rho\cos\theta\rho^2\sin^2\theta + 2\rho\sin\theta\right) \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\int_1^2 \left[\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} \left(\rho^4\cos\theta\sin^2\theta + \rho^2\sin\theta\right) \mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}\rho \\ &= 2\int_1^2 \left[\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} \left(\rho^4 \frac{\sin^3\theta}{3} - \rho^2\cos\theta\right) \mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}\rho \\ &= 2\int_1^2 \left(\frac{1}{6\sqrt{2}}\,\rho^4 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\rho^2 - \frac{1}{6\sqrt{2}}\,\rho^4 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\rho^2 \right) \mathrm{d}\rho \\ &= -2\sqrt{2} \int_1^2 \rho^2 \mathrm{d}\rho \\ &= -\frac{14}{3}\sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

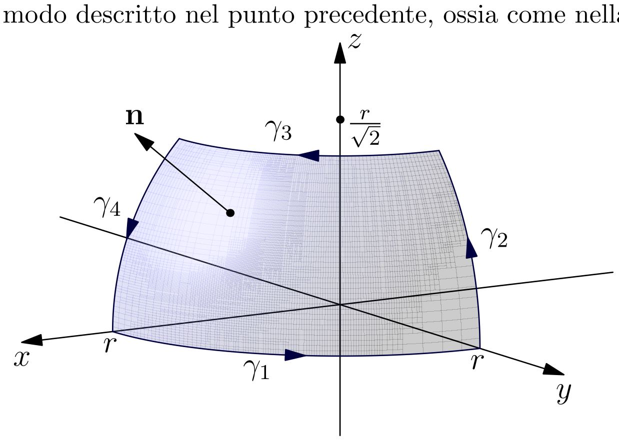
4. (a) i. La superficie Σ è la porzione della sfera $S \;:\; x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (di centro $O \equiv (0,0,0)$ e raggio r) contenuta nel primo ottante ($x, y, z \ge 0$) e compresa tra i due piani orizzontali $\pi_1 \;:\; z = 0$ e $\pi_2 \;\; z = r/\sqrt{2}$.



Essendo una porzione di sfera, la superficie Σ è orientabile.

ii. Il bordo γ di Σ è una curva regolare a tratti composta (come si vede nella figura seguente) da quattro archi di circonferenza. Più precisamente, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, dove γ_1 è la semicirconferenza di centro $O \equiv (0,0,0)$ e raggio r che va dal punto $(r,0,0)$ al punto $(0,r,0)$, γ_2 è la semicirconferenza di centro O e raggio r che va dal punto $(0,r,0)$ al punto $(0, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}})$, γ_3 è la semicirconferenza di centro $(0,0,\frac{r}{\sqrt{2}})$ e raggio $\frac{r}{\sqrt{2}}$ che va dal punto $(0, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}})$ al punto $(\frac{r}{\sqrt{2}}, 0, \frac{r}{\sqrt{2}})$, γ_4 è la semicirconferenza di centro O e raggio r che va dal punto $(\frac{r}{\sqrt{2}}, 0, \frac{r}{\sqrt{2}})$ al punto $(r,0,0)$.

iii. L'orientazione di γ richiesta si ottiene utilizzando la regola della mano destra (in modo che sia *antioraria* rispetto al generico versore normale $\mathbf{n}$). È pertanto l'orientazione che si ottiene percorrendo γ nel modo descritto nel punto precedente, ossia come nella seguente figura:



(b) Il rotore di $\mathbf{F}$ è

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2+yz & y^2+xz & z^2+xy \end{vmatrix} = (x-x, -y+y, z-z) = \mathbf{0}\,.$$

Pertanto, essendo $\mathbf{F}$ irrotazionale su $\mathbb{R}^3$ ed essendo $\mathbb{R}^3$ semplicemente connesso, il campo $\mathbf{F}$ è conservativo su $\mathbb{R}^3$. Di conseguenza, il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo una qualsiasi curva chiusa è nullo. Poiché γ è una curva chiusa (come abbiamo visto nel punto (a)), si ha $L_\gamma(\mathbf{F}) = 0$.

(c) Il campo $\mathbf{G}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ su $\mathbb{R}^3$ e la superficie

$$\Sigma : \begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \varphi \in [\pi/4, \pi/2] \\ \theta \in [0, \pi/2]\,. \end{array}$$

è regolare e semplice. Quindi, il flusso di $\mathbf{G}$ è

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{G}) = \iint_\Sigma \langle \mathbf{G}, \mathbf{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iint_\Omega \langle \mathbf{G}, \mathbf{N} \rangle \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta$$

dove $\mathbf{n}$ è il campo dei versori normali usato per orientare Σ e

$$\Omega = \{(\varphi, \theta) \; : \; \pi/4 \le \varphi \le \pi/2\,, 0 \le \theta \le \pi/2\}$$

è lo spazio dei parametri di Σ. Poiché $\mathbf{N} = r\sin\varphi\,\mathbf{X} =$, si ha

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{G}, \mathbf{N} \rangle &= r\sin\varphi \, \langle (x+yz, y-2xz, z+xy), (x,y,z) \rangle \\ &= r\sin\varphi \, (x^2 + xyz + y^2 - 2xyz + z^2 + xyz) \\ &= r\sin\varphi \, (x^2+y^2+z^2) \\ &= r^3 \sin\varphi \end{aligned}$$

in ogni punto di Σ. Pertanto

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{G}) = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r^3 \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta = r^3 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta = r^3 \frac{\pi}{2} \big[\cos\varphi\big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi r^3}{2\sqrt{2}}\,.$$