Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — *Primo appello – 28 Giugno 2018*

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________

Es.1: 10 punti	**Es.2**: 9 punti	**Es.3**: 7 punti	**Es.4**: 7 punti	**Totale**

1. (a) Scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y' - 2y = 6\,\mathrm{e}^{x} + 3\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

   (b) Determinare la soluzione della precendente equazione che passa per il punto $P \equiv (0,1)$ e che ammette la retta $r \,:\, x + y - 1 = 0$ come retta tangente in P.

2. (a) Determinare il campo di esistenza $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ della funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\,.$$

   (b) Determinare i punti critici di f.

   (c) Determinare la natura dei punti critici di f.

   (d) Scrivere la derivata direzionale di f nel punto $\mathbf{x}_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{7}}\right)$ lungo la direzione data dal versore $\mathbf{v} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

3. Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F} = (-\ln(x^2+y^2), \ln(x^2+y^2))$ lungo la curva $\gamma = \partial\Omega$, orientata positivamente, dove

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; -\sqrt{3}\,x \le y \le \sqrt{3}\,x\,,\; 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}\,.$$

4. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = (x^2 + y + z, x + y^2 + z, x + y + z^2)$ attraverso la superficie $\Sigma = \partial\Omega$, orientata positivamente, dove

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 \le 1\,,\; 0 \le z \le 1\}\,.$$

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

Soluzioni

1. (a) Consideriamo l'equazione differenziale omogenea $y''+y'-2y=0$. Il polinomio caratteristico $\lambda^2+\lambda-2\lambda=0$ ha due radici reali distinte $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=-2$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_{om}(x) = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-2x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Per il principio di sovrapposizione, una soluzione particolare dell'equazione completa di partenza è data da

$$\overline{y}(x) = \overline{y}_1(x) + \overline{y}_2(x),$$

dove $\overline{y}_1$ è una soluzione particolare dell'equazione $y''+y'-2y=6\,\mathrm{e}^x$ e $\overline{y}_2$ è una soluzione particolare dell'equazione $y''+y'-2y=3\,\mathrm{e}^{-2x}$. In entrambi i casi, possiamo utilizzare il metodo di somiglianza. Poiché 1 e -2 sono le radici dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata, ci troviamo nel caso della risonanza. Quindi, una soluzione particolare dell'equazione completa di partenza avrà la forma

$$y(x) = Ax\mathrm{e}^x + Bx\mathrm{e}^{-2x}.$$

Derivando due volte, si ha

$$\begin{aligned} y'(x) &= A(1+x)\,\mathrm{e}^x + B(1-2x)\,\mathrm{e}^{-2x} \\ y''(x) &= A(2+x)\,\mathrm{e}^x - 4B(1-x)\,\mathrm{e}^{-2x}. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione di partenza, si ha

$$A(2+x)\,\mathrm{e}^x - 4B(1-x)\,\mathrm{e}^{-2x} + A(1+x)\,\mathrm{e}^x + B(1-2x)\,\mathrm{e}^{-2x} - 2Ax\mathrm{e}^x - 2Bx\mathrm{e}^{-2x} = 6\,\mathrm{e}^x + 3\,\mathrm{e}^{-2x}$$

ossia

$$3A\,\mathrm{e}^x - 3B\,\mathrm{e}^{-2x} = 6\,\mathrm{e}^x + 3\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Poiché le funzioni e^x e e^{-2x} sono linearmente indipendenti, la precedente identità è vera se e solo se $A=2$ e $B=-1$. Pertanto, la soluzione particolare cercata è

$$\overline{y}(x) = 2x\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{-2x}.$$

Di conseguenza, l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = y_{om}(x) + \overline{y}(x) = (c_1+2x)\,\mathrm{e}^x + (c_2-x)\,\mathrm{e}^{-2x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) La soluzione cercata è la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0)=1$ e $y'(0)=-1$. Poiché

$$\begin{cases} y(x) = (c_1+2x)\,\mathrm{e}^x + (c_2-x)\,\mathrm{e}^{-2x} \\ y'(x) = (2+c_1+2x)\,\mathrm{e}^x - (1+2c_2-2x)\,\mathrm{e}^{-2x}, \end{cases}$$

imponendo le condizioni iniziali, si ha

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ -1 = 2 + c_1 - 1 - 2c_2 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - 2c_2 = -2 \end{cases}$$

da cui si ha $c_1=0$ e $c_2=1$. Pertanto, la soluzione cercata è

$$y(x) = 2x\,\mathrm{e}^x + (1-x)\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

2. (a) Perché la funzione f sia definita occorre che $x\neq 0$ e $y\neq 0$. Quindi Ω è il piano $\mathbb{R}^2$ privato dei due assi cartesiani, ossia delle due rette di equazione $x=0$ e $y=0$.

(b) La funzione f è derivabile su tutto Ω. Inoltre, si ha

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} \\ f_y(x,y) = 1 - \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{y^2-1}{y^2} \end{cases}$$

I punti critici di f sono i punti per i quali

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} (x-1)(x+1) = 0 \\ (y-1)(y+1) = 0 \,. \end{cases}$$

Si hanno così i quattro punti critici $A \equiv (1,1)$, $B \equiv (-1,1)$, $C \equiv (-1,-1)$, $D \equiv (1,-1)$.

(c) La funzione f è di classe $\mathcal{C}^2$ su Ω. Le sue derivate parziali seconde sono

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2}{x^3}\,, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0\,, \qquad f_{yy}(x,y) = \frac{2}{y^3}$$

e la sua matrice hessiana è

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2/x^3 & 0 \\ 0 & 2/y^3 \end{bmatrix}.$$

Poiché la matrice hessiana H è diagonale, i suoi autovalori sono gli elementi che si trovano sulla diagonale principale. Pertanto, se $x > 0$ e $y > 0$, la matrice H possiede due autovalori positivi e quindi è definita positiva. Se $x < 0$ e $y < 0$, la matrice H possiede due autovalori negativi e quindi è definita negativa. Se $x > 0$ e $y < 0$, oppure $x < 0$ e $y > 0$, la matrice H possiede autovalori di segno opposto e quindi è indefinita. Di conseguenza, il punto $A \equiv (1,1)$ è di minimo, il punto $C \equiv (-1,-1)$ è di massimo, i punti $B \equiv (-1,1)$ e $D \equiv (1,-1)$ sono di sella.

(d) La funzione f è differenziabile su Ω. Quindi, per la formula del gradiente, si ha

$$D_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle$$

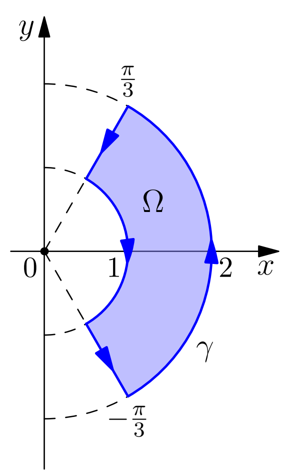
Poiché

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \left(1 - \frac{1}{x^2}, 1 - \frac{1}{y^2}\right)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{7}}\right) = (-3, -6)\,,$$

si ha

$$D_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \langle (-3,-6), \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right) \rangle = -2\sqrt{2} + 2\,.$$

3. L'insieme Ω è regolare, essendo unione di insiemi semplici in entrambe le direzioni degli assi.



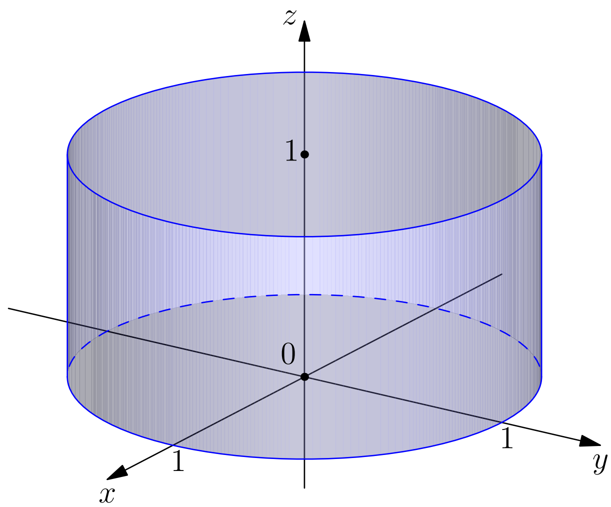
Il campo $\mathbf{F}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ su Ω. Quindi, per calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo $\gamma = \partial\Omega$, possiamo utilizzare il teorema di Gauss-Green:

$$L_\gamma(\mathbf{F}) = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega \frac{2(x+y)}{x^2 \; + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Passando in coordinate polari, l'insieme Ω è descritto dalle condizioni $1 \le \rho \le 2$ e $-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$. Quindi, si ha

$$\begin{aligned} L_\gamma(\mathbf{F}) &= \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2(\rho\cos\theta + \rho\sin\theta)}{\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\int_1^2 \mathrm{d}\rho \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos\theta + \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\Big[\sin\theta - \cos\theta\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}\,. \end{aligned}$$

4. Il campo $\mathbf{F}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^3$ e l'insieme Ω è una regione semplice lungo la direzione di ogni asse, essendo la seguente regione cilindrica



Pertanto, per calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la superficie chiusa Σ possiamo utilizzare il teorema della divergenza:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\iiint_\Omega (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Passando in coordinate cilindriche, l'insieme Ω è descritto dalle condizioni $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le t \le 1$. Quindi, si ha

$$\begin{aligned} \Phi_\Sigma(\mathbf{F}) &= 2\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho\cos\theta + \rho\sin\theta + t)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (\rho^2\cos\theta + \rho^2\sin\theta + \rho t)\,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\rho^2 t\cos\theta + \rho^2 t\sin\theta + \rho\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\rho^2\cos\theta + \rho^2\sin\theta + \frac{1}{2}\rho\right) \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left(\rho^2\cos\theta + \rho^2\sin\theta + \frac{1}{2}\rho\right) \mathrm{d}\theta\right] \mathrm{d}\rho \\ &= 2\int_0^1 \left[\rho^2\sin\theta - \rho^2\cos\theta + \frac{1}{2}\rho\theta\right]_0^{2\pi} \mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi\int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho = 2\pi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 = \pi\,. \end{aligned}$$