Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — *Secondo appello – 19 Luglio 2018*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

Es.1: 7 punti	**Es.2**: 8 punti	**Es.3**: 10 punti	**Es.4**: 7 punti	**Totale**

1. (a) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$y'(x) - \frac{1}{1+x^2}\, y(x) = x\, \mathrm{e}^{x+\operatorname{artg} x}\,.$$
(b) Determinare la soluzione particolare dell'equazione data tale che $y(1) = \mathrm{e}^{\pi}$.
(c) Stabilire se esistono delle soluzioni particolari che ammettono la retta di equazione $y = \mathrm{e}^{\pi}$ come asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

2. Si consideri la curva
$$\gamma : \begin{cases} x = t + \mathrm{e}^t \\ y = t - \mathrm{e}^t \\ z = \mathrm{e}^t \end{cases} \qquad t \in [-1, 1]\,.$$
(a) Stabilire se γ è piana.
(b) Determinare i versori della terna intrinseca per $t = 0$.
(c) Calcolare l'integrale di linea
$$I = \int_\gamma \sqrt{6 + (x - y + z)^2}\, \mathrm{d}s\,.$$

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x, y) = x\, \mathrm{e}^y - y\, \mathrm{e}^x\,.$$
(a) Stabilire se $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$ è un punto critico di f. In caso affermativo, stabilirne la natura.
(b) Calcolare la derivata direzionale di f in $\mathbf{0} = (0, 0)$ lungo la direzione individuata dalla semiretta OP, dove $O \equiv (0, 0)$ e $P \equiv (3, \sqrt{3})$.
(c) Calcolare l'integrale
$$I = \iint_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$
dove
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \le r^2\,,\ x, y \ge 0\}\,.$$

4. Si consideri il campo vettoriale
$$\mathbf{F} = (y^2 + yz, 2xy + xz + z^2, xy + 2yz)\,.$$
(a) Dimostrare che il campo $\mathbf{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^3$.
(b) Determinare un potenziale di $\mathbf{F}$.
(c) Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo un qualunque cammino che colleghi il punto $A \equiv (1, 1, 1)$ al punto $B \equiv (1, -1, -1)$.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

Soluzioni

1. (a) L'equazione differenziale data è lineare del primo ordine. Il suo integrale generale è

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathrm{e}^{\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}} \left[\int x\, \mathrm{e}^{x+\operatorname{artg} x}\, \mathrm{e}^{\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}}\, \mathrm{d}x + c \right] \\ &= \mathrm{e}^{\operatorname{artg} x} \left[\int x\, \mathrm{e}^{x+\operatorname{artg} x}\, \mathrm{e}^{\operatorname{artg} x}\, \mathrm{d}x + c \right] \\ &= \mathrm{e}^{\operatorname{artg} x} \left[\int x\, \mathrm{e}^{x}\, \mathrm{d}x + c \right] \\ &= \mathrm{e}^{\operatorname{artg} x} (x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c) \qquad c \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

(b) Imponendo la condizione iniziale $y(1) = \mathrm{e}^{\pi}$, si ha $\mathrm{e}^{\pi/4}\, c = \mathrm{e}^{\pi}$, da cui si ricava $c = \mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi}$. Quindi, la soluzione cercata è

$$y(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{artg} x}((x-1)\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi})\,.$$

(c) Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\operatorname{artg} x}((x-1)\,\mathrm{e}^x + c) = \mathrm{e}^{-\pi/2}\, c\,.$$

Pertanto, la soluzione cercata esiste ed è unica e la si ottiene imponendo la condizione $\mathrm{e}^{-\pi/2}\, c = \mathrm{e}^{\pi}$, da cui si ricava $c = \mathrm{e}^{3\pi/2}$. Si ha così la soluzione

$$y(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{artg} x}((x-1)\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\frac{3}{2}\pi})\,.$$

2. Sia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale che parametrizza la curva γ, ossia la funzione definita da $f(t) = (t + \mathrm{e}^t, t - \mathrm{e}^t, \mathrm{e}^t)$.

(a) Dalle prime due equazioni parametriche, si ha $x - y = 2\mathrm{e}^t$. Quindi, utilizzando la terza equazione, si ha $x - y = 2z$. Pertanto, la curva γ è piana ed è contenuta nel piano $x - y - 2z = 0$.

(b) Si ha $f'(t) = (1+\mathrm{e}^t, 1-\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^t)$ e $f''(t) = (\mathrm{e}^t, -\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^t)$. Quindi, per $t = 0$, si ha $f'(0) = (2,0,1)$, $f''(0) = (1,-1,1)$ e $f'(0) \wedge f''(0) = (1,-1,-2)$. Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(0) &= \frac{f'(0)}{\|f'(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2,0,1) \\ \mathbf{b}(0) &= \frac{f'(0)\wedge f''(0)}{\|f'(0)\wedge f''(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(1,-1,-2) \\ \mathbf{n}(0) &= \mathbf{b}(0) \wedge \mathbf{t}(0) = \frac{1}{\sqrt{30}}\,(-1,-5,2)\,. \end{aligned}$$

(c) Si ha $f'(t) = (1+\mathrm{e}^t, 1-\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^t)$ e $\|f'(t)\| = \sqrt{2+3\mathrm{e}^{2t}}$. Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma \sqrt{6 + (x-y+z)^2}\,\mathrm{d}s = \int_{-1}^{1} \sqrt{6+9\mathrm{e}^{2t}}\,\sqrt{2+3\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{3}\int_{-1}^{1} (2+3\mathrm{e}^{2t})\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\left[2t + \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{2t}\right]_{-1}^{1} = \sqrt{3}\,(4 + 3\sinh 2)\,. \end{aligned}$$

3. (a) La funzione f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}$. Le sue derivate parziali sono

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \mathrm{e}^y - y\,\mathrm{e}^x \\ f_y(x,y) = x\,\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} f_x(1,1) = \mathrm{e} - \mathrm{e} = 0 \\ f_y(1,1) = \mathrm{e} - \mathrm{e} = 0\,. \end{cases}$$

Pertanto, $\mathbf{x}_0 = (1,1)$ è un punto critico di f. Le derivate seconde di f sono

$$\begin{cases} f_{xx}(x,y) = -y\,\mathrm{e}^x \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x \\ f_{yy}(x,y) = x\,\mathrm{e}^y \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} f_{xx}(1,1) = -\mathrm{e} \\ f_{xy}(1,1) = f_{yx}(1,1) = \mathrm{e} - \mathrm{e} = 0 \\ f_{yy}(1,1) = \mathrm{e}\,. \end{cases}$$

Pertanto, la matrice hessiana di f in $\mathbf{x}_0$ è

$$H(1,1) = \begin{bmatrix} -\mathrm{e} & 0 \\ 0 & \mathrm{e} \end{bmatrix}.$$

Essendo una matrice diagonale, i suoi autovalori coincidono con gli elementi diagonali. Quindi, possedendo un autovalore negativo e un autovalore positivo, è una matrice indefinita e $\mathbf{x}_0$ è un punto di sella.

(b) Il vettore che individua il punto P è $\mathbf{w} = (3, \sqrt{3})$. Poiché $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, il versore associato è

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{(3,\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\Big).$$

A questo punto, si tratta di calcolare la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{0})$. Poiché f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}$ (essendo di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}$), possiamo utilizzare la formula del gradiente:

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{0}) = \langle \nabla f(\mathbf{0}), \mathbf{v} \rangle = \langle (1,-1), \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\Big) \rangle = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,.$$

(c) L'insieme Ω è la porzione disco che ha centro nell'origine e che ha raggio 1 contenuta nel primo quadrante. In coordinate polari, l'insieme Ω è pertanto definito dalle condizioni: $0 \le \rho \le r$ e $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$. Quindi, utilizzando le coordinate polari, si ha

$$\begin{aligned} I &= \iint_\Omega (x\,\mathrm{e}^y - y\,\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^r \int_0^{\pi/2} (\rho\cos\vartheta\,\mathrm{e}^{\rho\sin\vartheta} - \rho\sin\vartheta\,\mathrm{e}^{\rho\cos\vartheta})\;\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= \int_0^r \left[\int_0^{\pi/2} (\rho^2\cos\vartheta\,\mathrm{e}^{\rho\sin\vartheta} - \rho^2\sin\vartheta\,\mathrm{e}^{\rho\cos\vartheta})\,\mathrm{d}\vartheta\right]\mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^r \Big[\rho\,\mathrm{e}^{\rho\sin\vartheta} + \rho\,\mathrm{e}^{\rho\cos\vartheta}\Big]_0^{\pi/2}\mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^r \Big[\rho\,\mathrm{e}^{\rho} + \rho - \rho - \rho\,\mathrm{e}^{\rho}\Big]_0^{\pi/2}\mathrm{d}\rho \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Osservazione. Si poteva giungere a questo risultato molto più rapidamente osservando che la regione Ω, nel piano xy, è simmetrica rispetto alla retta di equazione $y = x$ e che la funzione f presenta una simmetria di tipo dispari rispetto a tale retta, ossia per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$f(y,x) = y\,\mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^y = -(x\,\mathrm{e}^y - y\,\mathrm{e}^x) = -f(x,y)\,.$$

4. (a) Il campo $\mathbf{F}$ è definito su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Il suo rotore è

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2 + yz & 2xy + xz + z^2 & xy + 2yz \end{vmatrix} = (0,0,0)\,.$$

Pertanto, essendo irrotazionale su una regione semplicemente connessa, il campo $\mathbf{F}$ è conservativo.

(b) Un potenziale di $\mathbf{F}$ è dato da

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \int_0^x F_1(t,0,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^y F_2(x,t,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^z F_3(x,y,t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x 0\,\mathrm{d}t + \int_0^y 2xt\,\mathrm{d}t + \int_0^z (xy+2yt)\,\mathrm{d}t = \Big[xt^2\Big]_0^y + \Big[xyt+yt^2\Big]_0^z = xy^2 + xyz + yz^2\,. \end{aligned}$$

(c) Poiché il campo $\mathbf{F}$ è conservativo, il lavoro richiesto non dipende dal cammino considerato, ma solo dai punti estremi del cammino ed è dato da

$$L = U(B) - U(A) = U(1,-1,-1) - U(1,1,1) = 1+1-1-(1+1+1) = -2\,.$$