Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — *Terzo appello – 7 Settembre 2018*

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________

Es.1: 7 punti	**Es.2**: 9 punti	**Es.3**: 7 punti	**Es.4**: 10 punti	**Totale**

1. (a) Determinare la soluzione f del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3x^2(y-1)^2 \\ y(0) = -1\,. \end{cases}$$

   (b) Determinare il più ampio intervallo I su cui f è definita.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

   (a) Stabilire se f è continua in $\mathbf{0} = (0,0)$.
   (b) Stabilire se f è derivabile in $\mathbf{0}$.
   (c) Stabilire se $\mathbf{0}$ è un punto critico di f.
   (d) Stabilire se $\mathbf{0}$ è un punto di minimo assoluto di f.
   (e) Stabilire se f è limitata su $\mathbb{R}^2$.
   (f) Stabilire se esistono le derivate direzionali di f in $\mathbf{0}$.
   (g) Stabilire se esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $O \equiv (0,0,0)$.

3. Calcolare l'integrale di linea

$$I = \int_\gamma (1 + x^2 + y^2)^{3/2}\, \mathrm{d}s$$

   dove

$$\gamma : \begin{cases} x = \theta\cos\theta \\ y = \theta\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0,\pi]\,.$$

4. Sia Σ il bordo della regione

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\,,\ -r \leq \sqrt{2}\, z \leq r\}\,.$$

   (a) Descrivere la superficie Σ.
   (b) Determinare l'orientazione positiva di Σ.
   (c) Calcolare l'area di Σ.
   (d) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = (x\mathrm{e}^{-xyz}, y\mathrm{e}^{-xyz}, -2z\mathrm{e}^{-xyz})$ attraverso la superficie Σ, orientata positivamente.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

Soluzioni

1. (a) L'equazione differenziale data è del primo ordine a variabili separabili, con $a(x) = 3x^2$ e $b(y) = (y-1)^2$. Poiché la funzione a è continua in un intorno di $x_0 = 0$ e la funzione b è di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di $y_0 = -1$, il problema di Cauchy dato ammette esattamente una soluzione locale. Poiché l'equazione $b(y) = 0$ ha solo la soluzione $y = 1$, si ha una sola soluzione stazionaria $y(x) = 1$, che però non risolve il problema di Cauchy dato. Separando le variabili, si ha

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^2} = \int 3x^2 \, \mathrm{d}x$$

ossia

$$-\frac{1}{y-1} = x^3 + c \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

da cui si ottiene l'integrale generale

$$y(x) = 1 - \frac{1}{x^3 + c} \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -1$, si ottiene $-1 = 1 - 1/c$, ossia $c = 1/2$. Pertanto, la soluzione cercata è data dalla funzione

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x^3 + 1/2} = 1 - \frac{2}{2x^3+1} = \frac{2x^3-1}{2x^3+1}\,.$$

(b) La funzione f è definita ed è derivabile per $x \neq -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Pertanto, il più ampio intervallo I su cui f è definita è $I = \big(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\big)$.

2. (a) Consideriamo la generica retta di equazione $y = mx$, passante per l'origine. Allora, si ha

$$f(x, mx) = \frac{|mx^2|}{x^2 + m^2x^2} = \frac{|m|x^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{|m|}{1+m^2}$$

e

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \frac{|m|}{1+m^2}\,.$$

Poiché il valore di questo limite dipende dal parametro m, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

non esiste e di conseguenza non si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)\,.$$

Quindi, la funzione f non è continua in $(0,0)$.

(b) Poiché

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0\,,$$

la funzione f possiede le derivate parziali in $\mathbf{0}$, e quindi è derivabile in $\mathbf{0}$.

(c) Poiché f è derivabile in $\mathbf{0}$ e $\nabla f(\mathbf{0}) = 0$, il punto $\mathbf{0}$ è un punto critico di f.

(d) Poiché $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $f(0,0) = 0$, si ha che $\mathbf{0}$ è un punto di minimo assoluto di f. Poiché f si annulla per $x = 0$ e per $y = 0$, tutti i punti degli assi x e y sono punti di minimo assoluto per f.

(e) Passando in coordinate polari, la funzione diventa

$$F(\rho,\theta) = |\sin\theta\cos\theta| = \frac{1}{2}\,|\sin 2\theta|\,.$$

Quindi $0 \le F(\rho,\theta) \le 1/2$, per ogni $\rho \in (0,+\infty)$ e per ogni $\theta \in [0,2\pi]$. Pertanto, essendo $0 \le f(x,y) \le 1/2$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la funzione f è limitata.

(f) Dato un versore $\mathbf{v} = (a,b)$, si ha

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{0}+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2|ab|}{t^3(a^2+b^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{|ab|}{t}\,.$$

Se $a=0$ oppure $b=0$, allora il limite precedente è 0 e quindi la funzione f possiede le derivate direzionali in $\mathbf{0}$ lungo i versori $\pm \mathrm{e}_1$ e $\pm \mathrm{e}_2$. In particolare, ritroviamo che la funzione f è derivabile in $\mathbf{0}$. Se invece $a \ne 0$ e $b \ne 0$, allora il limite precedente non esiste e quindi, in questo caso, la funzione f non ammette derivata direzionale in $\mathbf{0}$.

(g) Non essendo continua in $\mathbf{0}$, la funzione f non è differenziabile in $\mathbf{0}$, e quindi il grafico di f non ammette piano tangente in O.

3. Sia $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ la funzione vettoriale che parametrizza γ, ossia la funzione definita da $f(\theta) = (\theta\cos\theta, \theta\sin\theta)$. Poiché

$$\begin{cases} x' = \cos\theta - \theta\sin\theta \\ y' = \sin\theta + \theta\cos\theta\,, \end{cases}$$

si ha

$$\|f'(\theta)\| = \sqrt{1+\theta^2}\,.$$

Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi (1+\theta^2\cos^2\theta + \theta^2\sin^2\theta)^{3/2}\|f'(\theta)\|\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi (1+\theta^2)^{3/2}\sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi (1+\theta^2)^2\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi (1+2\theta^2+\theta^4)\,\mathrm{d}\theta = \pi + \frac{2}{3}\,\pi^3 + \frac{1}{5}\,\pi^5\,. \end{aligned}$$

4. (a) La superficie Σ è data dall'unione del disco D_1 di centro $C_1 \equiv (0,0,-r/\sqrt{2})$ e raggio $r/\sqrt{2}$ che giace sul piano $\pi_1 : z = -r/\sqrt{2}$, del disco D_2 di centro $C_2 \equiv (0,0,r/\sqrt{2})$ e raggio $r/\sqrt{2}$ che giace sul piano $\pi_2 : z = r/\sqrt{2}$ e dalla porzione S' della sfera S di centro $O \equiv (0,0,0)$ e raggio r compresa tra i due piani orizzontali π_1 e π_2.

(b) Poiché Σ è una superficie chiusa, l'orientazione positiva di Σ è quella data dai versori normali che puntano verso l'esterno.

(c) Poiché $\Sigma = D_1 \cup S' \cup D_2$, dove D_i ed S' si intersecano solo lungo il bordo ($i = 1,2$) e D_1 e D_2 sono disgiunti, si ha $\mathcal{A}(\Sigma) = \mathcal{A}(D_1) + \mathcal{A}(S') + \mathcal{A}(D_2)$. Per l'area dei dischi si ha $\mathcal{A}(D_1) = \mathcal{A}(D_2) = \pi r^2/2$. Passando in coordinate sferiche, la superficie S' è determinata dalle condizioni $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ e $0 \le \theta \le 2\pi$. Pertanto, la sua area è data da

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(S') &= \iint_{S'} \mathrm{d}\sigma = \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^{2\pi} \|\mathbf{N}\|\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^{2\pi} r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= r^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi r^2\big[-\cos\varphi\big]_{\pi/4}^{3\pi/4} = 2\pi r^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\pi r^2\,. \end{aligned}$$

In conclusione, si ha $\mathcal{A}(\Sigma) = (1+2\sqrt{2})\,\pi r^2$.

(d) Il campo $\mathbf{F}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ e la superficie $\Sigma = \partial\Omega$ è orientata positivamente. Pertanto, per calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ, possiamo utilizzare il teorema della divergenza:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Poiché

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \mathrm{e}^{-xyz} - xyz\mathrm{e}^{-xyz} + \mathrm{e}^{-xyz} - xyz\mathrm{e}^{-xyz} - 2\mathrm{e}^{-xyz} + 2xyz\mathrm{e}^{-xyz} = 0\,,$$

si ha $\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = 0$.