Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — *Primo compito in itinere – 5 Novembre 2018*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

Es.1: 7 punti	**Es.2**: 5 punti	**Es.3**: 9 punti	**Es.4**: 12 punti	**Totale**

1. Si consideri la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$F(x,y) = x\mathrm{e}^y - \cos(xy)\,.$$
   (a) Si dimostri che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $y = g(x)$, di classe $\mathcal{C}^2$, in un opportuno intorno del punto $P \equiv (1,0)$, tale che $g(1) = 0$.
   (b) Scrivere lo sviluppo di Taylor del secondo ordine di g nel punto $x_0 = 1$.

2. Si consideri la trasformazione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da
$$F(x,y,z) = (x^2+y^2, y^2+z^2, x^2+z^2)\,.$$
   (a) Determinare i punti in cui F è localmente invertibile.
   (b) Stabilire se il punto $P \equiv (1,1,3)$ appartiene all'immagine di F.

3. Calcolare l'integrale triplo
$$I = \iiint_\Omega \frac{y^2(x^2+y^2+2z)}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
dove
$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2 \le 1\,,\; 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\,,\; y \ge 0\}.$$

4. (a) Dimostrare che la curva
$$\gamma : \begin{cases} x = \theta + \cos^2\theta \\ y = \theta + \sin^2\theta \\ z = \sin 2\theta \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R}$$
è biregolare nel punto P che si ottiene per $\theta = 0$.
   (b) Determinare la terna intrinseca di γ in P.
   (c) Calcolare la curvatura e il raggio di curvatura di γ in P.
   (d) Determinare il centro di curvatura di γ in P.
   (e) Calcolare l'accelerazione centripeta in P.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

Soluzioni

1. (a) Si ha $F(1,0) = 1 - 1 = 0$. Inoltre F è una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ su tutto $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x\mathrm{e}^y + x\sin(xy)\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 1 \neq 0\,.$$

Sono pertanto verificate tutte le ipotesi del teorema del Dini, che garantisce l'esistenza della funzione g richiesta.

(b) Lo sviluppo di Taylor del secondo ordine di g nel punto $x_0 = 1$ è

$$g(x) = g(1) + g'(1)(x-1) + \frac{g''(1)}{2}(x-2)^2 + o((x-2)^2) \qquad x \to 1\,.$$

Sappiamo già che $g(1) = 0$. Dobbiamo calcolare $g'(1)$ e $g''(1) = 0$. Per fare questo abbiamo bisogno delle seguenti derivate

$$\begin{cases} F_x = \mathrm{e}^y + y\sin(xy) \\ F_y = x\mathrm{e}^y + x\sin(xy) \end{cases} \qquad \begin{cases} F_x(1,0) = 1 \\ F_y(1,0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{xx} = y^2\cos(xy) \\ F_{xy} = \mathrm{e}^y + \sin(xy) + xy\cos(xy) \\ F_{yy} = x\mathrm{e}^y + x^2\cos(xy) \end{cases} \qquad \begin{cases} F_{xx}(1,0) = 0 \\ F_{xy}(1,0) = 1 \\ F_{yy}(1,0) = 2\,. \end{cases}$$

Pertanto, si ha

$$g'(1) = -\frac{F_x(1,0)}{F_y(1,0)} = -1$$

e

$$g''(1) = -\frac{F_y(1,0)^2F_{xx}(1,0) - 2F_x(1,0)F_y(1,0)F_{xy}(1,0) + F_x(1,0)^2F_{yy}(1,0)}{F_y(1,0)^3} = 0\,.$$

In conclusione, lo sviluppo richiesto è

$$g(x) = -(x-1) + o((x-1)^2) \qquad x \to 1\,.$$

2. (a) La trasformazione F è di classe $\mathcal{C}^1$ su $\mathbb{R}^3$. La sua matrice jacobiana è

$$J = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 2y & 2z \\ 2x & 0 & 2z \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\det J = 16xyz\,.$$

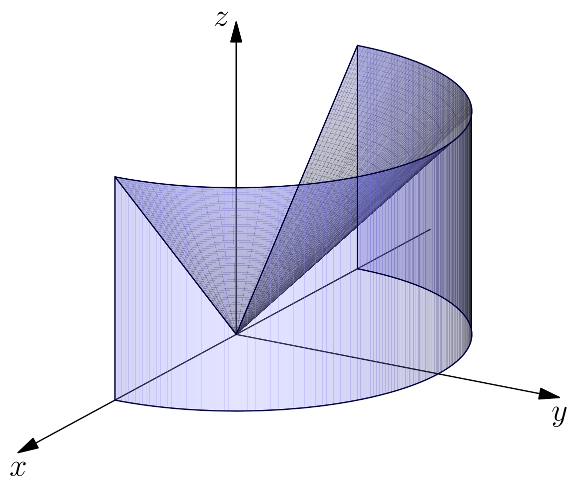
Pertanto, per il teorema di invertibilità locale, F è localmente invertibile in ogni punto dello spazio che non stia su uno dei piani coordinati.

(b) Il punto $P \equiv (1,1,3)$ appartiene all'immagine di F se e solo se il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

ammette soluzione. Facendo la differenza tra la prima e la seconda equazione, si ha $x^2 - z^2 = 0$, ossia $z^2 = z^2$. Sostituendo nella terza equazione, si ha $2x^2 = 3$, ossia $x^2 = 3/2$. Sostituendo questo valore nella prima equazione, si ha $y^2 = 1 - 3/2 = -1/2$ e questo è impossibile. Pertanto, il punto P non possiede alcuna controimmagine mediante F.

3. La condizione $x^2 + y^2 \leq 1$ determina la regione di spazio all'interno del cilindro circolare retto Γ_1 di equazione $x^2 + y^2 = 1$, avente l'asse z come asse. La condizione $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ determina la regione di spazio compresa tra il piano xy e il cono circolare retto Γ_2 di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, che ha vertice nell'origine e che ha l'asse z come asse. Pertanto, dovendo anche essere $y \geq 0$, Ω è la regione di spazio, nel primo e secondo ottante, compresa il cilindro Γ_1 e il cono Γ_2.



In coordinate cilindriche, l'insieme Ω è determinato dalle condizioni $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq t \leq \rho$. Pertanto, l'integrale diventa

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^\rho \frac{\rho^2 \sin^2\theta \, (\rho^2 + 2t)}{1+\rho} \, \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{\rho^3}{1+\rho} \left(\int_0^\pi \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^\rho (\rho^2 + 2t) \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^1 \frac{\rho^3}{1+\rho} \left(\left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin\theta\cos\theta \right]_0^\pi \left[\rho^2 t + t^2 \right]_0^\rho \right) \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{\rho^3}{1+\rho} \, (\rho^3 + \rho^2) \, \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^5 \, \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}
$$

4. (a) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale che parametrizza la curva γ, ossia la funzione definita da $f(\theta) = (\theta + \cos^2\theta, \theta + \sin^2\theta, 2\sin 2\theta)$. Si ha $P = f(0) = (1, 0, 0)$ e

$$
\begin{cases} x' = 1 - 2\cos\theta\sin\theta = 1 - \sin 2\theta \\ y' = 1 + 2\sin\theta\cos\theta = 1 + \sin 2\theta \\ z' = 2\cos 2\theta \end{cases}
\qquad\qquad
\begin{cases} x'' = -2\cos 2\theta \\ y'' = 2\cos 2\theta \\ z'' = -4\sin 2\theta\,. \end{cases}
$$

Pertanto $f'(0) = (1, 1, 2)$, $f''(0) = (-2, 2, 0)$ e $f'(0) \wedge f''(0) = (-4, -4, 4)$. Quindi

$$
\|f'(0)\| = \sqrt{6} \qquad \text{e} \qquad \|f'(0) \wedge f''(0)\| = 4\sqrt{3}\,.
$$

Poiché $\|f'(0) \wedge f''(0)\| \neq 0$, la curva γ è biregolare in P.

(b) La terna intrinseca di γ in P è

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}(0) &= \frac{f'(0)}{\|f'(0)\|} = \frac{(1,1,2)}{\sqrt{6}} \\
\mathbf{b}(0) &= \frac{f'(0) \wedge f''(0)}{\|f'(0) \wedge f''(0)\|} = \frac{(-1,-1,1)}{\sqrt{3}} \\
\mathbf{n}(0) &= \mathbf{b}(0) \wedge \mathbf{t}(0) = \frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}$$

(c) La curvatura di γ in P è

$$\kappa(0) = \frac{\|f'(0) \wedge f''(0)\|}{\|f'(0)\|^3} = \frac{4\sqrt{3}}{6\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,.$$

Il raggio di curvatura di γ in P è

$$\rho(0) = \frac{1}{\kappa(0)} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,.$$

(d) Il centro di curvatura di γ in P è

$$C(0) = P + \rho(0)\,\mathbf{n}(0) = (1,0,0) + \frac{3}{\sqrt{2}}\,\frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right).$$

(e) La velocità scalare in P è

$$v(0) = \|f'(0)\| = \sqrt{6}$$

e quindi l'accelerazione centripeta in P è

$$a_c(0) = \kappa(0) v(0)^2 = \frac{v(0)^2}{\rho(0)} = 2\sqrt{2}\,.$$

Osservazione. I vettori velocità e accelerazione in P sono $\mathbf{v} = f'(0) = (1,1,2)$ e $\mathbf{a} = f''(0) = (-2,2,0)$. Poiché $\mathbf{v}$ ed $\mathbf{a}$ sono ortogonali, il vettore $\mathbf{a}$ coincide con la componente centripeta e quindi $a_c = \|f''(0)\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.