Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II *Secondo compito in itinere – 16 Gennaio 2019*

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________

Es.1: 8 punti	**Es.2**: 9 punti	**Es.3**: 9 punti	**Es.4**: 7 punti	**Totale**

1. Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F} = (x^2 - y^2, xy)$ lungo il bordo γ (orientato positivamente) della regione
$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \leq 1\,,\; y \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

2. Determinare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 18t - 2\mathrm{e}^{2t} \\ y'(0) = 2 \\ y(0) = 4\,. \end{cases}$$
Inoltre, se possibile, determinare lo sviluppo in serie di Taylor, centrato in $t = 0$, della soluzione trovata.

3. Al variare del parametro reale $R > 0$, calcolare l'integrale
$$I_R = \int_{\gamma_R} \frac{(z+1)\,\mathrm{e}^{\pi z}}{z^2(z^2+1)}\,\mathrm{d}z$$
dove $\gamma_R : |z - 1 - \mathrm{i}| = R$ è orientata positivamente.

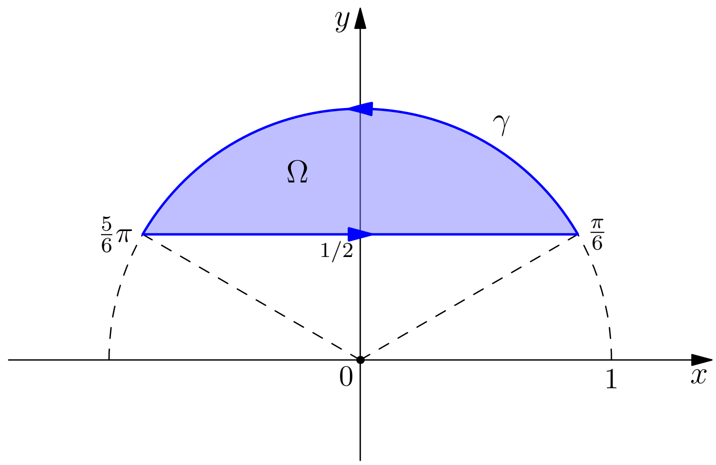
4. Calcolare gli integrali
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \pi t}{3t^2 + 4t + 2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{e} \qquad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi t}{3t^2 + 4t + 2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

Soluzioni

1. Il campo $\mathbf{F}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$ e, quindi, è di classe $\mathcal{C}^1$ su Ω. La regione Ω



è un insieme semplice. Possiamo quindi utilizzare il teorema di Gauss-Green

$$L_\gamma(\mathbf{F}) = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3 \iint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Passando alle coordinate polari, si ha che Ω è determinato dalle condizioni $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5}{6}\pi$ e $\frac{1}{2\sin\theta} \le \rho \le 1$, e

$$\begin{aligned}
L_\gamma(\mathbf{F}) &= 3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \int_{\frac{1}{2\sin\theta}}^{1} \rho \sin\theta\, \rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho = 3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \left(\int_{\frac{1}{2\sin\theta}}^{1} \rho^2\,\mathrm{d}\rho \right) \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\frac{1}{2\sin\theta}}^{1} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \left(1 - \frac{1}{8}\frac{1}{\sin^3\theta} \right) \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \left(\sin\theta - \frac{1}{8}\frac{1}{\sin^2\theta} \right) \mathrm{d}\theta = \left[-\cos\theta + \frac{1}{8}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,.
\end{aligned}$$

2. L'equazione data è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti constanti. L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ ha due soluzioni reali e distinte $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$. Pertanto, la soluzione generale dell'omogenea associata è

$$y_{om} = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 \mathrm{e}^{3t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Utilizzando il metodo di somiglianza e il principio di sovrapposizione, una soluzione particolare dell'equazione completa è del tipo

$$y = At + B + C\mathrm{e}^{2t}\,.$$

Pertanto, si ha $y' = A + 2C\mathrm{e}^{2t}$ e $y'' = 4C\mathrm{e}^{2t}$. Sostituendo nell'equazione completa, si ha

$$4C\mathrm{e}^{2t} - 4(A + 2C\mathrm{e}^{2t}) + 3(At + B + C\mathrm{e}^{2t}) = 0$$

ossia

$$3At + -4A + 3B - C\mathrm{e}^{2t} = 18t - 2\mathrm{e}^{2t}$$

ossia

$$\begin{cases} 3A = 18 \\ -4A + 3B = 0 \\ -C = -2 \end{cases}$$

da cui si ricava $A = 6$, $B = 8$ e $C = 2$. Si ha così la soluzione particolare

$$\widetilde{y} = 6t + 8 + 2\mathrm{e}^{2t}.$$

e, di conseguenza, la soluzione generale

$$y(t) = y_{om}(t) + \widetilde{y}(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{3t} + 6t + 8 + 2\mathrm{e}^{2t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Poiché

$$y'(t) = c_1\mathrm{e}^t + 3c_2\mathrm{e}^{3t} + 6 + 4\mathrm{e}^{2t},$$

imponendo le condizioni iniziali, si ha

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 + 6 + 4 = 2 \\ c_1 + c_2 + 8 + 2 = 4 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} c_1 + 3c_2 = -8 \\ c_1 + c_2 = -6 \end{cases}$$

da cui si trova $c_1 = -5$ e $c_2 = -1$. Quindi, in conclusione, la soluzione cercata è

$$y(t) = -5\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{3t} + 6t + 8.$$

Questa funzione, essendo una somma di esponenziali e di un polinomio, è certamente sviluppabile in serie di MalLaurin. Utilizzando lo sviluppo dell'esponenziale

$$\mathrm{e}^{at} = \sum_{n\geq 0} a^n \frac{t^n}{n!}$$

(che converge su tutto $\mathbb{R}$), si ha

$$\begin{aligned} y(t) &= -5\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{3t} + 6t + 8 \\ &= -5\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{n!} + 2\sum_{n\geq 0} 2^n\frac{t^n}{n!} - \sum_{n\geq 0} 3^n\frac{t^n}{n!} + 6t + 8 \\ &= \sum_{n\geq 0}(2^{n+1} - 3^n - 5)\,\frac{t^n}{n!} + 6t + 8 \\ &= -4 - 4t + \sum_{n\geq 2}(2^{n+1} - 3^n - 5)\,\frac{t^n}{n!} + 6t + 8 \\ &= 4 + 2t + \sum_{n\geq 2}(2^{n+1} - 3^n - 5)\,\frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Questa serie converge su tutto $\mathbb{R}$.

3. La funzione

$$f(z) = \frac{(z+1)\,\mathrm{e}^{\pi z}}{z^2(z^2+1)}$$

è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$, tranne che nei punti 0, $\pm\mathrm{i}$ dove il denominatore si annulla. Poiché 0 è un polo del secondo ordine e $\pm\mathrm{i}$ sono poli semplici, si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f,0) &= \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^2 f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{(z+1)\,\mathrm{e}^{\pi z}}{z^2+1} \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{(\mathrm{e}^{\pi z} + \pi(z+1)\,\mathrm{e}^{\pi z})(z^2+1) - 2z(z+1)\,\mathrm{e}^{\pi z}}{(z^2+1)^2} = 1 + \pi \\ \operatorname{Res}(f,\mathrm{i}) &= \lim_{z\to \mathrm{i}}(z-\mathrm{i})f(z) = \lim_{z\to \mathrm{i}}\frac{(z+1)\,\mathrm{e}^{\pi z}}{z^2(z+\mathrm{i})} = \frac{(1+\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}}{\mathrm{i}^2(2\mathrm{i})} = \frac{1+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} \\ \operatorname{Res}(f,-\mathrm{i}) &= \lim_{z\to -\mathrm{i}}(z+\mathrm{i})f(z) = \lim_{z\to -\mathrm{i}}\frac{(z+1)\,\mathrm{e}^{\pi z}}{z^2(z-\mathrm{i})} = \frac{(1-\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}}}{\mathrm{i}^2(-2\mathrm{i})} = -\frac{1-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}. \end{aligned}$$

La curva γ_R è la circonferenza di centro $1+\mathrm{i}$ e di raggio R. Le distanze dei punti singolari di f dal centro di γ_R sono

$$\begin{aligned}
&d(\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}) = |\mathrm{i}-1-\mathrm{i}| = 1\\
&d(0, 1+\mathrm{i}) = |1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}\\
&d(-\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}) = |-\mathrm{i}-1-\mathrm{i}| = |-1-2\mathrm{i}| = \sqrt{5}\,.
\end{aligned}$$

Per $0 < R < 1$, la funzione f è olomorfa all'interno di γ_R. Quindi, per il teorema integrale di Cauchy, si ha $I_R = 0$.

Per $1 < R < \sqrt{2}$, la funzione f è olomorfa all'interno di γ_R, tranne che in i. Quindi, per il teorema dei residui, si ha

$$I_R = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}) = (1+\mathrm{i})\pi\,.$$

Per $\sqrt{2} < R < \sqrt{5}$, la funzione f è olomorfa all'interno di γ_R, tranne che in 0 e in i. Quindi, per il teorema dei residui, si ha

$$I_R = 2\pi\mathrm{i}\,(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,\mathrm{i})) = \pi + (3\pi + 2\pi^2)\,\mathrm{i}\,.$$

Per $R > \sqrt{5}$, la funzione f è olomorfa all'interno di γ_R, tranne che in 0 e in $\pm\mathrm{i}$. Quindi, per il teorema dei residui, si ha

$$I_R = 2\pi\mathrm{i}\,(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,\mathrm{i}) + \mathrm{Res}(f,-\mathrm{i})) = 2\pi(\pi+2)\,\mathrm{i}\,.$$

Infine, per $R = 1, \sqrt{2}, \sqrt{5}$, l'integrale I_R non può essere calcolato poiché la curva γ_R passa per una delle singolarità di f.

4. La funzione

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}z}}{3z^2+4z+2}$$

è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$, tranne che nei punti $z_{1,2} = \frac{-2\pm\mathrm{i}\sqrt{2}}{3}$ dove il denominatore si annulla. Di queste due singolarità solo $z_1 == \frac{-2+\mathrm{i}\sqrt{2}}{3}$ si trova nel semipiano $\mathrm{Im}\, z > 0$.

Poiché z_1 è un polo del primo ordine, si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, z_1) &= \lim_{z\to z_1} (z-z_1)f(z) = \lim_{z\to z_1} \frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}z}}{3(z-z_2)} = \frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}z_1}}{3(z_1-z_2)} = \frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\frac{-2+\mathrm{i}\sqrt{2}}{3}}}{2\sqrt{2}\,\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi}}{2\sqrt{2}\,\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi}}{2\sqrt{2}\,\mathrm{i}}\left(\cos\frac{2}{3}\pi - \mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi}}{2\sqrt{2}\,\mathrm{i}}\left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi}}{4\sqrt{2}\,\mathrm{i}}\,(1+\mathrm{i}\sqrt{3})\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, posto

$$M = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f, z_1) = -2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi}}{4\sqrt{2}\,\mathrm{i}}\,(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi}\,(1+\mathrm{i}\sqrt{3})\,,$$

si ha $I = \mathrm{Re}\, M$ e $J = \mathrm{Im}\, M$, ossia

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\pi t}{3t^2+4t+2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi}\\
&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\pi t}{3t^2+4t+2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi}\,.
\end{aligned}$$