Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II *Quarto appello – 16 gennaio 2019*

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________

Es.1: 7 punti	**Es.2**: 8 punti	**Es.3**: 9 punti	**Es.4**: 9 punti	**Totale**

1. Determinare la soluzione generale dell'equazione

$$y'' - 4y' + 3y = 18t - 2e^{2t} .$$

2. Determinare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = xy\, e^{x-y}$$

e la loro natura.

3. Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F} = (x^3 e^x - 3y^5, 5x^3y^2)$ lungo il bordo γ (orientato positivamente) della regione

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ r^2 \le x^2 + y^2 \le 2r^2 \, , \ y \ge x \}$$

dove $r \in \mathbb{R} \, , \ r > 0 \, .$

4. Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t - \cos^2 t \\ y = t - \sin^2 t \\ z = \sqrt{2}\, \sin t \cos t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Dimostrare che γ è biregolare nel punto P che si ottiene per $t = 0$.

(b) Determinare la terna intrinseca di γ in P .

(c) Calcolare l'integrale curvilineo

$$I = \int_\Gamma z \, ds$$

dove Γ è il tratto della curva γ che si ottiene per $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

Soluzioni

1. L'equazione data è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti constanti. L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ ha due soluzioni reali e distinte $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$. Pertanto, la soluzione generale dell'omogenea associata è

$$y_{om} = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 \mathrm{e}^{3t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Utilizzando il metodo di somiglianza e il principio di sovrapposizione, una soluzione particolare dell'equazione completa è del tipo

$$y = At + B + C\mathrm{e}^{2t}\,.$$

Pertanto, si ha $y' = A + 2C\mathrm{e}^{2t}$ e $y'' = 4C\mathrm{e}^{2t}$. Sostituendo nell'equazione completa, si ha

$$4C\mathrm{e}^{2t} - 4(A + 2C\mathrm{e}^{2t}) + 3(At + B + C\mathrm{e}^{2t}) = 0$$

ossia

$$3At + -4A + 3B - C\mathrm{e}^{2t} = 18t - 2\mathrm{e}^{2t}$$

ossia

$$\begin{cases} 3A = 18 \\ -4A + 3B = 0 \\ -C = -2 \end{cases}$$

da cui si ricava $A = 6$, $B = 8$ e $C = 2$. Si ha così la soluzione particolare

$$\widetilde{y} = 6t + 8 + 2\mathrm{e}^{2t}\,.$$

e, di conseguenza, la soluzione generale

$$y(t) = y_{om}(t) + \widetilde{y}(t) = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 \mathrm{e}^{3t} + 6t + 8 + 2\mathrm{e}^{2t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

2. La funzione f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Quindi i suoi punti critici sono i le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = (1+x)y\,\mathrm{e}^{x-y} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x(1-y)\,\mathrm{e}^{x-y} = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} (1+x)y = 0 \\ x(1-y) = 0 \end{cases}$$

da cui si ha $x = 0$ e $y = 0$, oppure $x = -1$ e $y = 1$. Pertanto, i punti critici di f sono $O \equiv (0,0)$ e $A \equiv (-1,1)$.

Poiché

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2+x)y\,\mathrm{e}^{x-y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (1+x)(1-y)\,\mathrm{e}^{x-y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x(2-y)\,\mathrm{e}^{x-y} \end{cases}$$

la matrice hessiana di f è

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} (2+x)y\,\mathrm{e}^{x-y} & (1+x)(1-y)\,\mathrm{e}^{x-y} \\ (1+x)(1-y)\,\mathrm{e}^{x-y} & -x(2-y)\,\mathrm{e}^{x-y} \end{bmatrix}.$$

Poiché la matrice hessiana

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

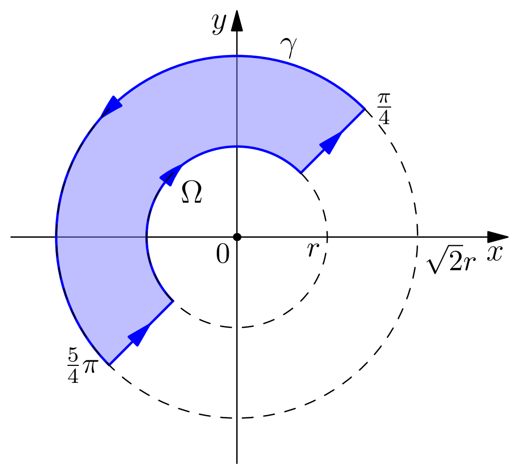
ha determinate -1, la forma quadratica associata ad $H(0,0)$ è indefinita e l'origine O è un punto di sella.

Poiché la matrice hessiana

$$H(-1,1) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2} \end{bmatrix}$$

ha due autovalori positivi, la forma quadratica associata ad $H(-1,1)$ è definita positiva e il punto A è un punto di minimo.

3. Il campo $\mathbf{F}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$ e, quindi, è di classe $\mathcal{C}^1$ su Ω. La regione Ω



è un insieme regolare. Possiamo quindi utilizzare il teorema di Gauss-Green

$$L_\gamma(\mathbf{F}) = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 15 \iint_\Omega (x^2 + y^2)\, y^2 \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, .$$

Passando alle coordinate polari, si ha che Ω è determinato dalle condizioni $r \leq \rho \leq \sqrt{2} r$ e $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi$, e

$$\begin{aligned} L_\gamma(\mathbf{F}) &= 15 \int_r^{\sqrt{2}r} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \rho^2 \rho^2 \sin^2\theta \, \rho \, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta = 15 \int_r^{\sqrt{2}r} \rho^5 \, \mathrm{d}\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta \\ &= 15 \left[\frac{\rho^6}{6} \right]_r^{\sqrt{2}r} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin\theta\cos\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} = \frac{5}{2} (2^3 r^6 - r^6) \left(\frac{5}{8}\pi - \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) = \frac{35}{4} \pi r^6\, . \end{aligned}$$

4. (a) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale che parametrizza la curva γ, ossia la funzione definita da

$$f(t) = \left(t - \cos^2 t, t - \sin^2 t, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2t \right).$$

Poiché

$$\begin{cases} x' = 1 + 2\cos t \sin t = 1 + \sin 2t \\ y' = 1 - 2\sin t \cos t = 1 - \sin 2t \\ z' = \sqrt{2}\cos 2t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x'' = 2\cos 2t \\ y'' = -2\cos 2t \\ z'' = -2\sqrt{2}\sin 2t\, , \end{cases}$$

si ha $P = f(0) = (-1, 0, 0)$, $f'(0) = (1, 1, \sqrt{2})$, $f''(0) = (2, -2, 0)$. Quindi si ha

$$f'(0) \wedge f''(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\, (\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2)$$

e

$$\|f'(0)\| = 2 \qquad \text{e} \qquad \|f'(0) \wedge f''(0)\| = 4\sqrt{2}\, .$$

Poiché f è derivabile due volte in 0 e $\|f'(0) \wedge f''(0)\| \neq 0$, la curva γ è biregolare in P.

(b) La terna intrinseca di γ in P è

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(0) &= \frac{f'(0)}{\|f'(0)\|} = \frac{(1, 1, \sqrt{2})}{2} \\ \mathbf{b}(0) &= \frac{f'(0) \wedge f''(0)}{\|f'(0) \wedge f''(0)\|} = \frac{(1, 1, -\sqrt{2})}{2} \\ \mathbf{n}(0) &= \mathbf{b}(0) \wedge \mathbf{t}(0) = \frac{(1, -1, 0)}{\sqrt{2}}\, . \end{aligned}$$

(c) Poiché

$$\|f'(t)\| = \sqrt{2 + 2\sin^2 2t + 2\cos^2 2t} = 2 \qquad \forall t \in [0, \pi/2]\,,$$

la curva Γ è regolare, e

$$\begin{aligned} I &= \int_\Gamma z \, \mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2t \, \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \, \mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2} \left[-\frac{\cos 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \sqrt{2}\,. \end{aligned}$$