Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — *Primo Appello – 13 Febbraio 2019*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

Es.1: 8 punti	**Es.2**: 8 punti	**Es.3**: 8 punti	**Es.4**: 9 punti	**Totale**

1. Si consideri la funzione f definita da

$$f(x,y) = xy\,\mathrm{e}^{-2x-y}\,.$$

   (a) Determinare i punti critici di f.

   (b) determinare la natura dei punti critici trovati.

2. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = (2xyz + y^2 - x, x + 5y - 2y^2 z, xy^2 + yz^2 - z)$ attraverso la superficie $\Sigma = \partial\Omega$ (orientata positivamente), dove

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 + z^2 \le 1\,,\; x \ge 0\,, y \ge 0\,,\; 0 \le z \le \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

3. (a) Mostrare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \mathrm{e}^x y^2 \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

   ammette un'unica soluzione (locale) e determinare tale soluzione.

   (b) Determinare l'intervallo massimale su cui è definita la soluzione trovata.

   (c) Scrivere la formula di MacLaurin del terzo ordine della soluzione trovata.

4. Calcolare gli integrali complessi

$$I = \int_\gamma (z^3 + 5z^2)\,\mathrm{e}^{3z\cos 4z}\sin(z^3 + 3z^2 + 7)\,\mathrm{d}z$$
$$J = \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{z^2(z^2 - 2z + 2)}\,\mathrm{d}z$$

   dove $\gamma : |z + 1 - \mathrm{i}| = \sqrt{6}$ è orientata positivamente.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

---

1. (a) La funzione f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Quindi, i punti critici di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} (y - 2xy)\,\mathrm{e}^{-2x-y} = 0 \\ (x - xy)\,\mathrm{e}^{-2x-y} = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} (1-2x)y = 0 \\ x(1-y) = 0\,. \end{cases}$$

Le soluzioni sono $x = 1/2$, $y = 1$ e $y = 0$, $x = 0$. Quindi, i punti critici di f sono $O \equiv (0,0)$ e $A \equiv (1/2, 1)$.

(b) Per determinare la natura dei punti critici di f, possiamo studiare la matrice hessiana H di f. Poiché

$$\begin{cases} f_{xx} = (-4y + 4xy)\,\mathrm{e}^{-2x-y} \\ f_{xy} = (1-2x)(1-y)\,\mathrm{e}^{-2x-y} \\ f_{yy} = (-2x + xy)\,\mathrm{e}^{-2x-y}\,, \end{cases}$$

si ha

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-4y+4xy)\,\mathrm{e}^{-2x-y} & (1-2x)(1-y)\,\mathrm{e}^{-2x-y} \\ (1-2x)(1-y)\,\mathrm{e}^{-2x-y} & (-2x+xy)\,\mathrm{e}^{-2x-y} \end{bmatrix}.$$

Per O, la matrice hessiana

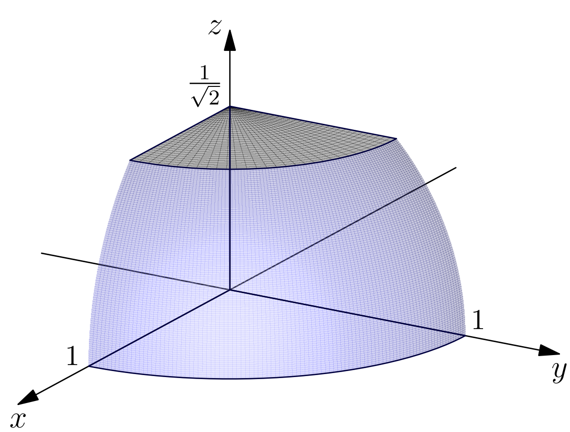
$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

è indefinita, poiché ha determinate negativo. Quindi, O è un punto di sella per f.
Per A, la matrice hessiana

$$H(1/2,1) = \begin{bmatrix} -2\,\mathrm{e}^{-2} & 0 \\ 0 & (-1/2)\,\mathrm{e}^{-2} \end{bmatrix}$$

è definita negativa, avendo due autovalori negativi. Quindi, A è un punto di massimo per f.

2. Il campo $\mathbf{F}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^3$. Quindi, poiché la regione Ω



è un insieme xyz-semplice, possiamo utilizzare il teorema della divergenza. Poiché

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 2yz - 1 + 5 - 4yz + 2yz - 1 = 3\,,$$

si ha

$$\Phi_\gamma(\mathbf{F}) = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

L'integrale triplo a secondo membro può essere calcolato in più modi.

Primo modo. Poiché

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ z \in [0, 1/\sqrt{2}]\,,\ (x,y) \in \Omega(z)\}$$

dove

$$\Omega(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2 + y^2 \leq \sqrt{1-z^2}\}\,,$$

possiamo integrare per strati. Quindi, si ha

$$\begin{aligned}\Phi_\gamma(\mathbf{F}) &= 3\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\iint_{\Omega(z)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}z = 3\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathcal{A}(\Omega(z))\,\mathrm{d}z \\ &= 3\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\pi}{4}\,(1-z^2)\,\mathrm{d}z = \frac{3}{4}\,\pi\left[z - \frac{z^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{3}{4}\,\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{2}}\right) = \frac{5\pi}{8\sqrt{2}}\,.\end{aligned}$$

Secondo modo. Passando alle coordinate sferiche, l'insieme Ω è determinato dalle condizioni $0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sqrt{2}\cos\varphi}$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ quando $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, e dalle condizioni $0 \leq \rho \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ quando $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Quindi, si ha

$$\begin{aligned}\Phi_\gamma(\mathbf{F}) &= 3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}\cos\varphi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta + 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{3\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\left[\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}\cos\varphi}} \rho^2\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\varphi + \frac{3\pi}{2}\int_0^1 \rho^2\,\mathrm{d}\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{3\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}\cos\varphi}} \mathrm{d}\varphi + \frac{3\pi}{2}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 \Big[-\cos\varphi\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\varphi}{2\sqrt{2}\,\cos^3\varphi}\,\mathrm{d}\varphi + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2\cos^2\varphi}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{8\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{5\pi}{8\sqrt{2}}\,.\end{aligned}$$

Osservazione. In modo analogo, si può integrare anche per fili.

3. (a) L'equazione data è un'equazione differenziale a variabili separabili del tipo $y' = a(x)b(y)$, dove $a(x) = \mathrm{e}^x$ e $b(y) = y^2$. Poiché a è continua in un intorno di $x_0 = 0$ e b è di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di $y_0 = 1$, il problema di Cauchy dato ammette una ed una sola soluzione (locale). La soluzione singolare $y(x) = 0$ non soddisfa la condizione iniziale del problema. Separando le variabili, e integrando si ha

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

e quindi

$$-\frac{1}{y(x)} = \mathrm{e}^x + c\,.$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava $c = -2$. Pertanto, la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{2 - \mathrm{e}^x}\,.$$

(b) La soluzione trovata è definita per $2 - \mathrm{e}^x \neq 0$, ossia per $x \neq \ln 2$. Poiché $x_0 =< \ln 2$, l'intervallo massimale su cui è definita la soluzione $y(x)$ è $(-\infty, \ln 2)$.

(c) Usando l'equazione differenziale di partenza, si ha

$$\begin{aligned}&y'(x) = \mathrm{e}^x y(x)^2 \\ &y''(x) = \mathrm{e}^x y(x)^2 + 2\mathrm{e}^x y(x)y'(x) \\ &y'''(x) = \mathrm{e}^x y(x)^2 + 4\mathrm{e}^x y(x)y'(x) + 2\mathrm{e}^x y'(x)^2 + 2\mathrm{e}^x y(x)y''(x)\,.\end{aligned}$$

Usando ora la condizione iniziale, si ha

$$\begin{aligned}
&y(0) = 1\\
&y'(0) = y(0)^2 = 1\\
&y''(0) = y(0)^2 + 2y(0)y'(0) = 3\\
&y'''(0) = y(0)^2 + 4y(0)y'(0) + 2y'(0)^2 + 2y(0)y''(0) = 13\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, la formula di MacLaurin richiesta è

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + y''(0)\frac{x^2}{2} + y'''(0)\frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad x \to 0$$

ossia

$$y(x) = 1 + x + \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{13}{6}\,x^3 + o(x^3) \qquad x \to 0\,.$$

4. La funzione

$$f(z) = (z^3 + 5z^2)\,\mathrm{e}^{3z\cos 4z}\sin(z^3 + 3z^2 + 7)$$

è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$. Quindi, per il teorema integrale di Cauchy, si ha $I = 0$.

Invece, la funzione

$$g(z) = \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{z^2(z^2 - 2z + 2)}$$

è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$, tranne che nei punti $z_0 = 0$ e $z_{1,2} = 1 \pm \mathrm{i}$ dove il denominatore si annulla.

La curva γ è la circonferenza di centro $w = -1 + \mathrm{i}$ e raggio $\sqrt{6}$. Le distanze tra il centro di γ e i punti singolari di f sono

$$\begin{aligned}
&d(w, z_0) = |1 - \mathrm{i}| = \sqrt{2} < \sqrt{6}\\
&d(w, z_1) = |1 + \mathrm{i} + 1 - \mathrm{i}| = 2 < \sqrt{6}\\
&d(w, z_2) = |1 - \mathrm{i} + 1 - \mathrm{i}| = 2\sqrt{2} > \sqrt{6}\,.
\end{aligned}$$

Poiché le singolarità di f che si trovano all'interno di γ sono solo z_0 e z_1, per il teorema dei residui, si ha

$$J = 2\pi\mathrm{i}\big(\mathrm{Res}(f, z_0) + \mathrm{Res}(f, z_1)\big)\,.$$

Poiché $z_0 = 0$ è un polo del secondo ordine e $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ è un polo semplice, si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^2 f(z)) = \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{z^2 - 2z + 2}\\
&= \lim_{z \to 0} \frac{\pi\,\mathrm{e}^{\pi z}(z^2 - 2z + 2) - (2z - 2)\,\mathrm{e}^{\pi z}}{(z^2 - 2z + 2)^2} = \frac{\pi + 1}{2}\\
\mathrm{Res}(f, z_1) &= \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) = \lim_{z \to z_1} \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{z^2(z - z_2)} = \frac{\mathrm{e}^{\pi z_1}}{z_1^2(z_1 - z_2)}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{\pi(1+\mathrm{i})}}{(1 + \mathrm{i})^2(2\mathrm{i})} = \frac{\mathrm{e}^{\pi}\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}}{(2\mathrm{i})(2\mathrm{i})} = \frac{\mathrm{e}^{\pi}}{4}\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, si ha

$$J = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\pi + 1}{2} + \frac{\mathrm{e}^{\pi}}{4}\right) = \frac{(2 + 2\pi + \mathrm{e}^{\pi})\,\pi}{2}\,\mathrm{i}\,.$$