Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II

Quinto Appello – 13 Febbraio 2019

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

Es.1: 8 punti	**Es.2**: 8 punti	**Es.3**: 8 punti	**Es.4**: 8 punti	**Totale**

1. Si consideri la funzione f definita da

$$f(x,y) = xy\,\mathrm{e}^{-2x-y}\,.$$

   (a) Determinare i punti critici di f.
   (b) determinare la natura dei punti critici trovati.

2. (a) Mostrare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \mathrm{e}^x y^2 \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

   ammette un'unica soluzione (locale) e determinare tale soluzione.
   (b) Determinare l'intervallo massimale su cui è definita la soluzione trovata.
   (c) Scrivere la formula di MacLaurin del terzo ordine della soluzione trovata.

3. Determinare i valori del parametro reale k in modo che il campo

$$\mathbf{F} = (4x^3 + 3y^2 + 2yz, 6xy + 2kxz, 2xy - 1)$$

   sia conservativo. Per questi valori di k, determinare un potenziale di $\mathbf{F}$. Infine, calcolare il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo una la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = 1 + (1 - 3t + 2t^2)\,\mathrm{e}^t \\ y = 2 - (1 - t^2)\,\mathrm{e}^t \\ z = 1 + t(1-t)\,\mathrm{e}^t \end{cases} \qquad t \in [0,1]\,.$$

4. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = (2xyz + y^2 - x, x + 5y - 2y^2z, xy^2 + yz^2 - z)$ attraverso la superficie $\Sigma = \partial\Omega$ (orientata positivamente), dove

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\,,\ x \ge 0\,, y \ge 0\,,\ 0 \le z \le \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

---

1. (a) La funzione f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Quindi, i punti critici di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} (y - 2xy)\,\mathrm{e}^{-2x-y} = 0 \\ (x - xy)\,\mathrm{e}^{-2x-y} = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} (1-2x)y = 0 \\ x(1-y) = 0\,. \end{cases}$$

Le soluzioni sono $x = 1/2$, $y = 1$ e $y = 0$, $x = 0$. Quindi, i punti critici di f sono $O \equiv (0,0)$ e $A \equiv (1/2, 1)$.

(b) Per determinare la natura dei punti critici di f, possiamo studiare la matrice hessiana H di f. Poiché

$$\begin{cases} f_{xx} = (-4y + 4xy)\,\mathrm{e}^{-2x-y} \\ f_{xy} = (1-2x)(1-y)\,\mathrm{e}^{-2x-y} \\ f_{yy} = (-2x + xy)\,\mathrm{e}^{-2x-y}\,, \end{cases}$$

si ha

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-4y+4xy)\,\mathrm{e}^{-2x-y} & (1-2x)(1-y)\,\mathrm{e}^{-2x-y} \\ (1-2x)(1-y)\,\mathrm{e}^{-2x-y} & (-2x+xy)\,\mathrm{e}^{-2x-y} \end{bmatrix}.$$

Per O, la matrice hessiana

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

è indefinita, poiché ha determinate negativo. Quindi, O è un punto di sella per f.
Per A, la matrice hessiana

$$H(1/2,1) = \begin{bmatrix} -2\,\mathrm{e}^{-2} & 0 \\ 0 & (-1/2)\,\mathrm{e}^{-2} \end{bmatrix}$$

è definita negativa, avendo due autovalori negativi. Quindi, A è un punto di massimo per f.

2. (a) L'equazione data è un'equazione differenziale a variabili separabili del tipo $y' = a(x)b(y)$, dove $a(x) = \mathrm{e}^x$ e $b(y) = y^2$. Poiché a è continua in un intorno di $x_0 = 0$ e b è di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di $y_0 = 1$, il problema di Cauchy dato ammette una ed una sola soluzione (locale). La soluzione singolare $y(x) = 0$ non soddisfa la condizione iniziale del problema. Separando le variabili, e integrando si ha

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

e quindi

$$-\frac{1}{y(x)} = \mathrm{e}^x + c\,.$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava $c = -2$. Pertanto, la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{2 - \mathrm{e}^x}\,.$$

(b) La soluzione trovata è definita per $2 - \mathrm{e}^x \neq 0$, ossia per $x \neq \ln 2$. Poiché $x_0 =< \ln 2$, l'intervallo massimale su cui è definita la soluzione $y(x)$ è $(-\infty, \ln 2)$.

(c) Usando l'equazione differenziale di partenza, si ha

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \mathrm{e}^x y(x)^2 \\
y''(x) &= \mathrm{e}^x y(x)^2 + 2\mathrm{e}^x y(x)y'(x) \\
y'''(x) &= \mathrm{e}^x y(x)^2 + 4\mathrm{e}^x y(x)y'(x) + 2\mathrm{e}^x y'(x)^2 + 2\mathrm{e}^x y(x)y''(x)\,.
\end{aligned}$$

Usando ora la condizione iniziale, si ha

$$\begin{aligned}
y(0) &= 1 \\
y'(0) &= y(0)^2 = 1 \\
y''(0) &= y(0)^2 + 2y(0)y'(0) = 3 \\
y'''(0) &= y(0)^2 + 4y(0)y'(0) + 2y'(0)^2 + 2y(0)y''(0) = 13\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, la formula di MacLaurin richiesta è

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + y''(0)\frac{x^2}{2} + y'''(0)\frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad x \to 0$$

ossia

$$y(x) = 1 + x + \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{13}{6}\,x^3 + o(x^3) \qquad x \to 0\,.$$

3. Il campo $\mathbf{F}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^3$. Poiché

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 4x^3+3y^2+2yz & 6xy+2kxz & 2xy-1 \end{vmatrix} = 2(1-k)(x,0,-z)\,,$$

il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale solo per $k=1$. Pertanto, essendo $\mathbb{R}^3$ semplicemente connesso, il campo $\mathbf{F}$ è conservativo se e solo se $k=1$. In questo caso, un potenziale di $\mathbf{F}$ è dato da

$$\begin{aligned}
U(x,y,z) &= \int_0^x F_1(t,0,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^y F_2(x,t,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^z F_3(x,y,t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x 4t^3\,\mathrm{d}t + \int_0^y 6xt\,\mathrm{d}t + \int_0^z (2xy-1)\,\mathrm{d}t \\
&= 2x^4 + 3xy^2 + 2xyz - z\,.
\end{aligned}$$

Infine, per la conservatività, il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ dipende solo dal punto iniziale $A \equiv (2,1,1)$, che si ottiene per $t=0$, e dal punto finale $B \equiv (1,2,1)$, che si ottiene per $t=1$. Infatti, si ha

$$L_\gamma(\mathbf{F}) = U(B) - U(A) = U(1,2,1) - U(2,1,1) = -9\,.$$

Osservazione. Per calcolare il potenziale U si può procedere anche nel modo seguente. Poiché $\mathbf{F} = \nabla U$, si deve avere

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 = 4x^3 + 3y^2\,.$$

Integrando rispetto a x, si ha

$$U(x,y,z) = x^4 + 3xy^2 + \psi(y,z)\,.$$

Inoltre, si deve avere

$$\frac{\partial U}{\partial y} = F_2 = 6xy + 2xz$$

ossia

$$6xy + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 6xy + 2xz$$

ossia

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2xz\,.$$

Integrando rispetto a y, si ha

$$\psi(y,z) = 2xyz + \phi(z)$$

e quindi

$$U(x,y,z) = x^4 + 3xy^2 + 2xyz + \phi(z)\,.$$

Infine, si deve avere

$$\frac{\partial U}{\partial z} = F_3 = 2xy - 1$$

ossia

$$2xy + \phi'(z) = 2xy - 1$$

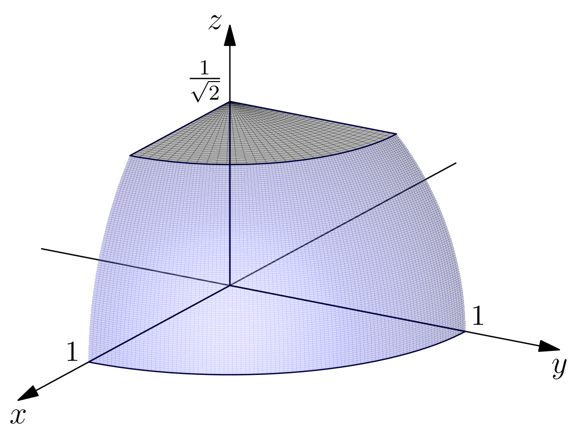
ossia

$$\phi'(z) = -1$$

da cui si ha $\phi(z) = -z + c$, con $c \in \mathbb{R}$. In conclusione, il potenziale di $\mathbf{F}$ è

$$U(x,y,z) = x^4 + 3xy^2 + 2xyz - z + c\,.$$

4. Il campo $\mathbf{F}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^3$. Quindi, poiché la regione Ω



è un insieme xyz-semplice, possiamo utilizzare il teorema della divergenza. Poiché

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 2yz - 1 + 5 - 4yz + 2yz - 1 = 3\,,$$

si ha

$$\Phi_\gamma(\mathbf{F}) = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

L'integrale triplo a secondo membro può essere calcolato in più modi.

Primo modo. Poiché

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z \in [0, 1/\sqrt{2}]\,,\ (x,y) \in \Omega(z)\}$$

dove

$$\Omega(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \le \sqrt{1 - z^2}\}\,,$$

possiamo integrare per strati. Quindi, si ha

$$\begin{aligned}\Phi_\gamma(\mathbf{F}) &= 3\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left[\iint_{\Omega(z)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z = 3\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathcal{A}(\Omega(z))\,\mathrm{d}z \\ &= 3\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\pi}{4}\,(1 - z^2)\,\mathrm{d}z = \frac{3}{4}\,\pi\left[z - \frac{z^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{3}{4}\,\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{2}}\right) = \frac{5\pi}{8\sqrt{2}}\,.\end{aligned}$$

Secondo modo. Passando alle coordinate sferiche, l'insieme Ω è determinato dalle condizioni $0 \le \rho \le \frac{1}{\sqrt{2}\cos\varphi}$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ quando $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$, e dalle condizioni $0 \le \rho \le 1$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ quando $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Quindi, si ha

$$\begin{aligned}
\Phi_\gamma(\mathbf{F}) &= 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}\cos\varphi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta + 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{3\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \left[\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}\cos\varphi}} \rho^2 \, \mathrm{d}\rho \right] \mathrm{d}\varphi + \frac{3\pi}{2} \int_0^1 \rho^2 \, \mathrm{d}\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{3\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}\cos\varphi}} \mathrm{d}\varphi + \frac{3\pi}{2} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 \Big[-\cos\varphi \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\varphi}{2\sqrt{2}\,\cos^3\varphi} \, \mathrm{d}\varphi + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2\cos^2\varphi} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\pi}{8\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{5\pi}{8\sqrt{2}} \, .
\end{aligned}$$

Osservazione. In modo analogo, si può integrare anche per fili.