Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II *Secondo Appello – 24 Giugno 2019*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

Es.1: 7 punti	**Es.2**: 7 punti	**Es.3**: 7 punti	**Es.4**: 7 punti	**Es.5**: 4 punti	**Totale**

1. Si consideri la funzione f definita da
$$f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 \,.$$
   (a) Determinare i punti critici di f.
   (b) Determinare la natura dei punti critici trovati.

2. Si consideri la trasformazione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da
$$F(x,y,z) = (y^2 + z^2, x^2 - y^2, x^2 + z^2)\,.$$
   (a) Stabilire se F è suriettiva.
   (b) Determinare i punti in cui F è localmente invertibile.
   (c) Determinare le controimmagini del punto $O \equiv (0,0,0)$.
   (d) Determinare le controimmagini del punto $P \equiv (1,0,1)$.

3. Calcolare l'integrale doppio
$$I = \iint_\Omega y\,\sqrt[4]{x^2+y^2}\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
dove Ω è la regione compresa nel primo quadrante e delimitata dall'asse y, dalla circonferenza γ_1 di centro $C_1 \equiv (0,0)$ e raggio $2r$ e dalla circonferenza γ_2 di centro $C_2 \equiv (r,0)$ e raggio r.

4. (a) Stabilire se il campo
$$\mathbf{F} = (x\mathrm{e}^x \cos y - y\mathrm{e}^x \sin y, -x\mathrm{e}^x \sin y - y\mathrm{e}^x \cos y)$$
   è conservativo.
   (b) Se esiste, calcolare un potenziale di $\mathbf{F}$.

5. Determinare l'anello di convergenza della serie di Laurent
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n+1}\,.$$

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

---

1. (a) La funzione f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Quindi, i punti critici di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} 2xy^2 - 2x = 0 \\ 2x^2y - 2y = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} x(y^2-1) = 0 \\ y(x^2-1) = 0\,. \end{cases}$$

Si hanno così i seguenti 5 punti critici: $O \equiv (0,0)$, $P_1 \equiv (1,1)$, $P_2 \equiv (-1,1)$, $P_3 \equiv (1,-1)$ e $P_4 \equiv (-1,-1)$.

(b) Per determinare la natura dei punti critici di f, possiamo studiare la matrice hessiana H di f:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y^2-2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2-1 \end{bmatrix}.$$

Poiché la matrice hessiana

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

è definita negativa (avendo due autovalori negativi), O è un punto di massimo per f.

Poiché le matrici hessiane

$$H(\pm1,\pm1) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad H(\pm1,\mp1) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

sono indefinite (avendo determinate negativo), P_1, P_2, P_3 e P_4 sono tutti punti di sella per f.

2. (a) La trasformazione F non è suriettiva poiché la prima (così come la terza) componente del vettore immagine non è mai negativa.

(b) La trasformazione F è di classe $\mathcal{C}^\infty$ (e quindi di classe $\mathcal{C}^1$) su tutto $\mathbb{R}^3$. La sua matrice jacobiana è

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 2y & 2z \\ 2x & -2y & 0 \\ 2x & 0 & 2z \end{bmatrix}$$

e il determinate jacobiano è

$$\det J = 8 \begin{bmatrix} 0 & y & z \\ x & -y & 0 \\ x & 0 & z \end{bmatrix} = 8(xyz - xyz) = 0\,.$$

Di conseguenza, la trasformazione F non è localmente invertibile in alcun punto.

(c) Le controimmagini del punto $O \equiv (0,0,0)$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + z^2 = 0 \end{cases}$$

da cui si ha immediatamente $x = y = z = 0$. Quindi, l'origine O ammette esattamente una controimmagine, data dallo spesso punto O.

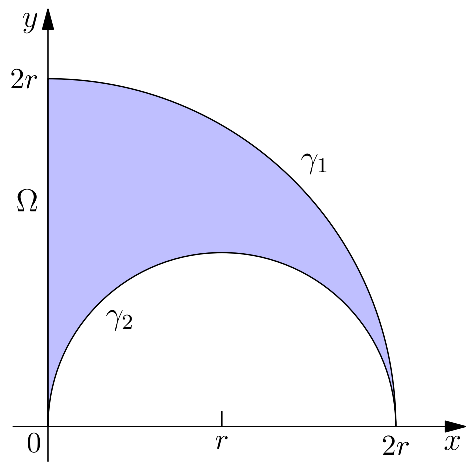
(d) Le controimmagini del punto $O \equiv (0,0,0)$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + z^2 = 1\,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione, si ha $y = \pm x$. Quindi, la prima e la terza equazione risultano equivalenti. Resta così solo l'equazione $x^2 + z^2 = 1$, che ammette come soluzioni $x = \cos\theta$ e $z = \sin\theta$, con $\theta \in [0, 2\pi)$. Pertanto, le controimmagini di P sono date dagli infiniti punti $(\cos\theta, \pm\cos\theta, \sin\theta)$, con $\theta \in [0, 2\pi)$. Equivalentemente, le controimmagini di P sono date dalle due ellissi

$$\gamma_1 : \begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \gamma_2 : \begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 0\,. \end{cases}$$

3. Primo modo. Come si vede dal disegno



la regione Ω è y-semplice (ma non x-semplice). Più precisamente, poiché la circonferenza γ_1 ha equazione $x^2 + y^2 = 4r^2$, e la circonferenza γ_2 ha equazione $(x - r)^2 + y^2 = r^2$, ossia $x^2 - 2rx + y^2 = 0$, si ha

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 2r\,,\ \sqrt{2rx - x^2} \le y \le \sqrt{4r^2 - x^2} \right\}.$$

Integrando mediante la formula di riduzione per regioni y-semplici, si ha

$$\begin{aligned}
I &= \iint_\Omega y\, \sqrt[4]{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^{2r} \left[\int_{\sqrt{2rx - x^2}}^{\sqrt{4r^2 - x^2}} y\, \sqrt[4]{x^2 + y^2} \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2r} \left[\frac{4}{5} (x^2 + y^2)^{5/4} \right]_{\sqrt{2rx - x^2}}^{\sqrt{4r^2 - x^2}} \mathrm{d}x = \frac{2}{5} \int_0^{2r} \left[(x^2 + 4r^2 - x^2)^{5/4} - (x^2 + 2rx - x^2)^{5/4} \right] \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{5} \int_0^{2r} \left[(4r^2)^{5/4} - (2rx)^{5/4} \right] \mathrm{d}x = \frac{2}{5} \left[(2r)^{5/2} x - \frac{4}{9}\, (2r)^{5/4} x^{9/4} \right]_0^{2r} \\
&= \frac{2}{5} \left[(2r)^{7/2} - \frac{4}{9}\, (2r)^{7/2} \right] = \frac{2}{9}\, (2r)^{7/2}\,.
\end{aligned}$$

Secondo modo. Passando alle coordinate polari, la regione Ω è determinato dalle condizioni $2r\cos\theta \le \rho \le 2r$ e $0 \le \theta \le \pi/2$. Pertanto, si ha

$$\begin{aligned}
I &= \iint_\Omega y\, \sqrt[4]{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \int_{2r\cos\theta}^{2r} \rho \sin\theta\, \sqrt{\rho}\, \rho\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin\theta \left[\int_{2r\cos\theta}^{2r} \rho^{5/2}\, \mathrm{d}\rho \right] \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin\theta \left[\frac{2}{7}\, \rho^{7/2} \right]_{2r\cos\theta}^{2r} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2}{7} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \left[(2r)^{7/2} - (2r\cos\theta)^{7/2} \right] \mathrm{d}\theta = \frac{2}{7}\, (2r)^{7/2} \int_0^{\pi/2} (\sin\theta - \sin\theta \cos^{7/2}\theta) \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2}{7}\, (2r)^{7/2} \left[-\cos\theta + \frac{2}{9}\, \cos^{9/2}\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{7}\, (2r)^{7/2} \left(1 - \frac{2}{9} \right) = \frac{2}{9}\, (2r)^{7/2}\,.
\end{aligned}$$

4. (a) Il campo $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ (e quindi di classe $\mathcal{C}^1$) su tutto $\mathbb{R}^3$. Poiché

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x} &= -y\mathrm{e}^x \cos y - \mathrm{e}^x \sin y - x\mathrm{e}^x \sin y \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= -x\mathrm{e}^x \sin y - \mathrm{e}^x \sin y - y\mathrm{e}^x \cos y \,, \end{aligned}$$

si ha

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \mathbf{0} \,,$$

ossia il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale. Di conseguenza, essendo $\mathbb{R}^3$ semplicemente connesso, il campo $\mathbf{F}$ è conservativo.

(b) Essendo conservativo, il campo $\mathbf{F}$ possiede un potenziale. Poiché $\mathbf{F}$ è definito su tutto $\mathbb{R}^3$, un potenziale è dato da

$$U(x,y) = \int_0^x F_1(t,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^y F_2(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + \int_0^y (-x\mathrm{e}^x \sin t - t\mathrm{e}^x \cos t)\,\mathrm{d}t \,.$$

Integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \big[t\mathrm{e}^t\big]_0^x - \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t - x\mathrm{e}^x \big[-\cos t\big]_0^y - \mathrm{e}^x \big[t \sin t\big]_0^y + \mathrm{e}^x \int_0^y \sin t\,\mathrm{d}t \\ &= x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1 + x\mathrm{e}^x \cos y - x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x y \sin y - \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{e}^x \\ &= (x-1)\,\mathrm{e}^x \cos y - \mathrm{e}^x y \sin y + 1 \,. \end{aligned}$$

5. La serie di Laurent data può essere riscritta come

$$f(z) = \sum_{n<0} \frac{z^n}{2^n+1} + \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{2^n+1} = \sum_{n>0} \frac{z^{-n}}{2^{-n}+1} + \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{2^n+1} = \sum_{n>0} \frac{1}{2^{-n}+1} \frac{1}{z^n} + \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{2^n+1} \,.$$

Affinchè la serie di Laurent converga, devono convergere entrambe queste serie. La prima serie converge per

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{2^{-n}+1}{2^{-n-1}+1} \frac{z^n}{z^{n+1}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{-n}+1}{2^{-n-1}+1} \frac{1}{|z|} = \frac{1}{|z|} < 1$$

ossia per $|z| > 1$. La seconda serie converge per

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{z^{n+1}}{2^{n+1}+1} \frac{2^n+1}{z^n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} |z| = \frac{1}{2}\,|z| < 1$$

ossia per $|z| < 2$. Pertanto, l'anello di convergenza di f è

$$A = \{ z \in \mathbb{C} \;:\; 1 < |z| < 2 \} \,.$$