Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — *Terzo Appello – 17 Luglio 2019*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

Es.1: 9 punti	**Es.2**: 6 punti	**Es.3**: 8 punti	**Es.4**: 6 punti	**Es.5**: 4 punti	**Totale**

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy|y|}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

   (a) Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
   (b) Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$.
   (c) Stabilire se f possiede derivate direzionali in $(0,0)$.
   (d) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

2. Si consideri la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x,y) = 2x^4y^2 + x^2y - y^3 - x - 1\,.$$

   (a) Stabilire se l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $y = g(x)$, di classe $\mathcal{C}^1$, in un opportuno intorno del punto $P \equiv (1,1)$, tale che $g(1) = 1$.
   (b) Determinare, se esiste, la retta tangente al grafico di g nel punto P.

3. Determinare il baricentro della regione

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 2x^2 - 2 \leq y \leq x^2 - 1\}\,.$$

4. Calcolare il flusso del campo

$$\mathbf{F} = (xy^2, -2yz + z\mathrm{e}^{2y}, x^2z - z^2\mathrm{e}^{2y})$$

   attraverso la superficie Σ, orientata positivamente, data dal bordo della regione

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2 \leq 4\,,\; 0 \leq z \leq x^2+y^2+1\}.$$

5. Determinare l'anello di convergenza della serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{9^{|n|}}\,.$$

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

Soluzioni

1. (a) Passando in coordinate polari, si ha

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \frac{\rho^3|\cos\theta||\sin\theta|^2}{\rho^2} = \rho|\cos\theta||\sin\theta|^2 \le \rho \to 0 \qquad \text{per } \rho\to 0\,.$$

Questo garantisce l'uniformità rispetto a θ e quindi si ha

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x}) = 0$$

ossia f è continua in $(0,0)$.

(b) La funzione f è derivabile in $(0,0)$, poichè esisitono le due derivate parziali:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{x} = 0\,.\end{aligned}$$

(c) Sia $\mathbf{v}=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ un versore, con $a^2+b^2=1$. Allora, si ha

$$D_{\mathbf{v}}f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t\mathbf{v})-f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{t^2ab|tb|}{(a^2+b^2)t^2} = \lim_{t\to 0} ab|b|\frac{|t|}{t}$$

e quest'ultimo limite non esiste, a meno che non sia $a=0$ oppure $b=0$. Così, f possiede derivate direzionali in $(0,0)$ solo lungo gli assi x e y.

(d) Poiché non esistono tutte le derivate direzionali in $(0,0)$, la funzione f non è differenziabile in $(0,0)$.

2. (a) Si ha $F(1,1)=0$. Inoltre F è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ (e quindi di classe $\mathcal{C}^1$) su tutto $\mathbb{R}^2$. Poiché

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4x^4y + x^2 - 3y^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 2 \ne 0\,,$$

la funzione g richiesta esiste (per il teorema del Dini).

(b) Sappiamo che $g(1)=1$. Dobbiamo calcolare $g'(1)$. Poiché

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 8x^3y^2 + 2xy - 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(1,1) = 9\,,$$

si ha

$$g'(1) = -\frac{F_x(1,1)}{F_y(1,1)} = -\frac{9}{2}\,.$$

Di conseguenza, l'equazione della retta tangente richiesta è

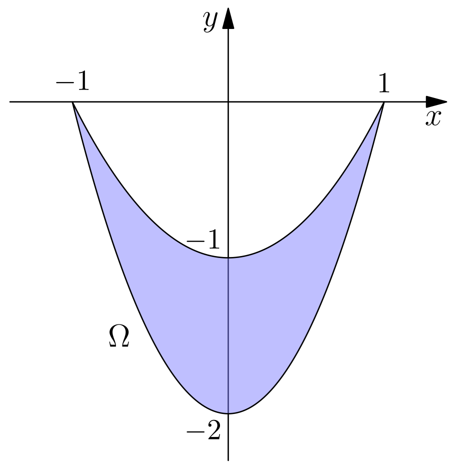
$$y-1 = -\frac{9}{2}(x-1)$$

ossia $9x+2y-11=0$.

3. Iniziamo con l'osservare che la regione Ω è definita per $2x^2-2\le x^2-1$, ossia per $x^2-1\le 0$, e questo accade se e solo se $-1\le x\le 1$. Pertanto, si ha

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; -1\le x\le 1\,,\; 2x^2-2\le y\le x^2-1\right\}$$

ossia Ω è una regione y-semplice (ma non x-semplice), come si vede anche direttamente dal disegno seguente



L'area di Ω è

$$\mathcal{A}(\Omega) = \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \left[\int_{2x^2-2}^{x^2-1} \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \left[\, y \,\right]_{2x^2-2}^{x^2-1} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (x^2-1)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\,.$$

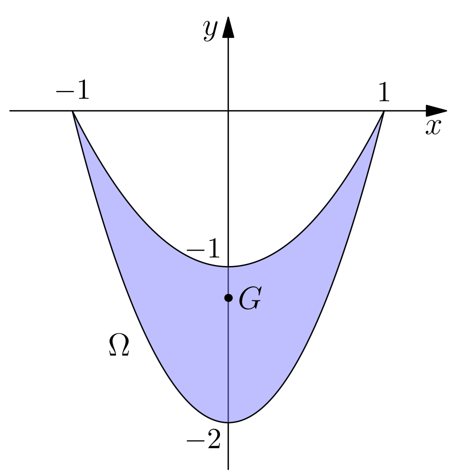
Per la simmetria di Ω, si ha $x_G = 0$. Inoltre, si ha

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{\mathcal{A}(\Omega)} \iint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3}{4} \int_{-1}^{1} \left[\int_{2x^2-2}^{x^2-1} y\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \frac{3}{4} \int_{-1}^{1} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{2x^2-2}^{x^2-1} \mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{8} \int_{-1}^{1} ((x^2-1)^2 - (2x^2-2)^2)\,\mathrm{d}x = -\frac{9}{8} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^2\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{9}{8} \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = -\frac{9}{8} \int_{-1}^{1} \left(\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + x \right) \mathrm{d}x = -\frac{6}{5}\,. \end{aligned}$$

In conclusione, il baricentro di Ω è

$$G \equiv \left(0, -\frac{6}{5}\right)$$

e quindi $G \in \Omega$.



4. Il campo $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ (e quindi di classe $\mathcal{C}^1$) su tutto $\mathbb{R}^3$. La regione Ω è la parte interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 4$, compresa tra il piano xy e il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2 + 1$, e il suo bordo $\Sigma = \partial\Omega$ è una superficie chiusa (regolare a pezzi). Possiamo così utilizzare il teorema della divergenza per calcolare $\Phi_\Sigma(\mathbf{F})$. Poiché la divergenza di $\mathbf{F}$ è

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = y^2 - 2z + 2z\mathrm{e}^{2y} + x^2 - 2z\mathrm{e}^{2y} = x^2 + y^2 - 2z\,,$$

si ha

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_\Omega (x^2+y^2-2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Passando alle coordinate cilindriche, la regione Ω è determinata dalle condizioni $\rho \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le t \le \rho^2+1$. Quindi, si ha

$$\begin{aligned}
\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho^2+1} (\rho^2 - 2t)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t\,. = 2\pi \int_0^2 \left[\int_0^{\rho^2+1} (\rho^3 - 2\rho t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\rho \\
&= 2\pi \int_0^2 \left[\rho^3 t - \rho t^2\right]_0^{\rho^2+1} \mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^2 \left(\rho^3(\rho^2+1) - \rho(\rho^2+1)^2\right)\mathrm{d}\rho \\
&= -2\pi \int_0^2 \left(\rho^3+\rho\right)\mathrm{d}\rho = -2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^2}{2}\right]_0^2 = -2\pi\left(\frac{2^4}{4}+\frac{2^2}{2}\right) = -12\pi\,.
\end{aligned}$$

5. La serie di Laurent data può essere riscritta come

$$f(z) = \sum_{n<0} \frac{z^{2n}}{9^{|n|}} + \sum_{n\ge 0} \frac{z^{2n}}{9^n} = \sum_{n>0} \frac{z^{-2n}}{9^n} + \sum_{n\ge 0} \frac{z^{2n}}{9^n} = \sum_{n>0} \frac{1}{9^n z^{2n}} + \sum_{n\ge 0} \frac{z^{2n}}{9^n}\,.$$

Affinchè la serie di Laurent converga, devono convergere entrambe queste series. La prima serie converge per

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{9^n z^{2n}}{9^{n+1} z^{2n+2}}\right| = \frac{1}{9|z|^2} < 1$$

ossia per $|z|^2 > 1/9$, ossia per $|z| > 1/3$. La seconda serie converge per

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{z^{2n+2}}{9^{n+1}}\,\frac{9^n}{z^{2n}}\right| = \frac{1}{9}\,|z|^2 < 1$$

ossia per $|z|^2 < 9$, ossia per $|z| < 3$. Pertanto, l'anello di convergenza di f è

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \;:\; \frac{1}{3} < |z| < 3 \right\}.$$