Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II (vecchio esame) — *Terzo Appello – 17 Luglio 2019*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

Es.1: 12 punti	**Es.2**: 8 punti	**Es.3**: 6 punti	**Es.4**: 4 punti	**Totale**

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy|y|}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) . \end{cases}$$

   (a) Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
   (b) Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$.
   (c) Stabilire se f possiede derivate direzionali in $(0,0)$.
   (d) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.
   (e) Stabilire se $(0,0)$ è un punto critico di f. In caso affermativo, stabilire la natura di $(0,0)$.

2. Determinare il baricentro della regione

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x^2 - 2 \leq y \leq x^2 - 1\} .$$

3. Calcolare il flusso del campo

$$\mathbf{F} = (xy^2, -2yz + z\mathrm{e}^{2y}, x^2 z - z^2 \mathrm{e}^{2y})$$

   attraverso la superficie Σ, orientata positivamente, data dal bordo della regione

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 4 \,, \ 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1\}.$$

4. Stabilire se la serie

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + n^2 + 1}{3^n + 2^n + 1}$$

   converge.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

---

1. (a) Passando in coordinate polari, si ha

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{\rho^3 |\cos\theta| |\sin\theta|^2}{\rho^2} = \rho |\cos\theta| |\sin\theta|^2 \le \rho \to 0 \qquad \text{per } \rho \to 0\,.$$

Questo garantisce l'uniformità rispetto a θ e quindi si ha

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x}) = 0$$

ossia f è continua in $(0,0)$.

(b) La funzione f è derivabile in $(0,0)$, poichè esisitono le due derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{x} = 0\,.$$

(c) Sia $\mathbf{v} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ un versore, con $a^2 + b^2 = 1$. Allora, si ha

$$D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\mathbf{v}) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{t^2 ab|tb|}{(a^2+b^2)t^2} = \lim_{t\to 0} ab|b| \frac{|t|}{t}$$

e quest'ultimo limite non esiste, a meno che non sia $a = 0$ oppure $b = 0$. Così, f possiede derivate direzionali in $(0,0)$ solo lungo gli assi x e y.

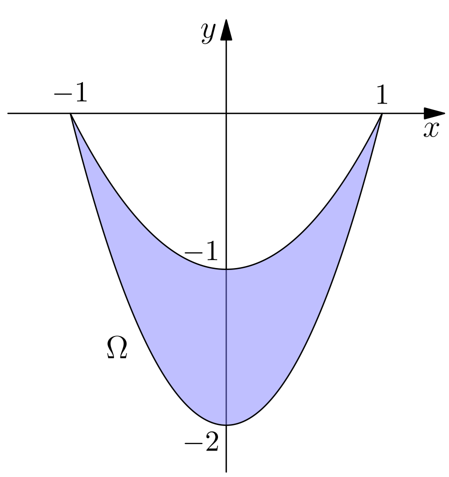
(d) Poiché non esistono tutte le derivate direzionali in $(0,0)$, la funzione f non è differenziabile in $(0,0)$.

(e) Poiché f è derivabile in $(0,0)$ e $\nabla f(0,0) = \mathbf{0}$, $(0,0)$ è un punto critico di f. Inoltre, si vede subito che in un qualunque intorno di $(0,0)$ la funzione f assume sempre sia valori positivi sia valori negativi. Quindi, $(0,0)$ è un punto di sella per f.

2. Iniziamo con l'osservare che la regione Ω è definita per $2x^2 - 2 \le x^2 - 1$, ossia per $x^2 - 1 \le 0$, e questo accade se e solo se $-1 \le x \le 1$. Pertanto, si ha

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; -1 \le x \le 1\,,\; 2x^2 - 2 \le y \le x^2 - 1 \right\}$$

ossia Ω è una regione y-semplice (ma non x-semplice), come si vede anche direttamente dal disegno seguente



L'area di Ω è

$$\mathcal{A}(\Omega) = \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \left[\int_{2x^2-2}^{x^2-1} \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \left[\, y\,\right]_{2x^2-2}^{x^2-1} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (x^2-1)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\,.$$

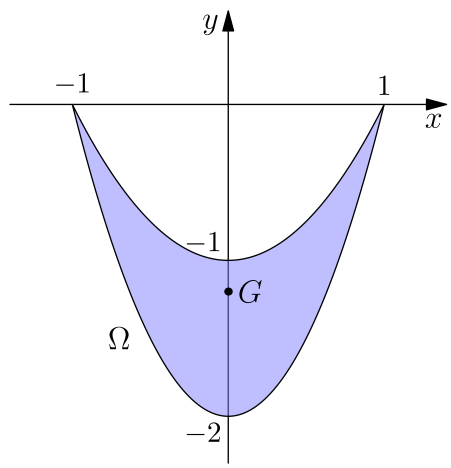
Per la simmetria di Ω, si ha $x_G = 0$. Inoltre, si ha

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{\mathcal{A}(\Omega)} \iint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\left[\int_{2x^2-2}^{x^2-1} y\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{2x^2-2}^{x^2-1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{8}\int_{-1}^{1}((x^2-1)^2 - (2x^2-2)^2)\,\mathrm{d}x = -\frac{9}{8}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^2\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{9}{8}\int_{-1}^{1}(x^4-2x^2+1)\,\mathrm{d}x = -\frac{9}{8}\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + x\right)\mathrm{d}x = -\frac{6}{5}\,. \end{aligned}$$

In conclusione, il baricentro di Ω è

$$G \equiv \left(0, -\frac{6}{5}\right)$$

e quindi $G \in \Omega$.



3. Il campo $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ (e quindi di classe $\mathcal{C}^1$) su tutto $\mathbb{R}^3$. La regione Ω è la parte interna al cilindro di equazione $x^2+y^2=4$, compresa tra il piano xy e il paraboloide di equazione $z = x^2+y^2+1$, e il suo bordo $\Sigma = \partial\Omega$ è una superficie chiusa (regolare a pezzi). Possiamo così utilizzare il teorema della divergenza per calcolare $\Phi_\Sigma(\mathbf{F})$. Poiché la divergenza di $\mathbf{F}$ è

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = y^2 - 2z + 2z\mathrm{e}^{2y} + x^2 - 2z\mathrm{e}^{2y} = x^2+y^2-2z\,,$$

si ha

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_\Omega (x^2+y^2-2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Passando alle coordinate cilindriche, la regione Ω è determinata dalle condizioni $\rho \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le t \le \rho^2+1$. Quindi, si ha

$$\begin{aligned} \Phi_\Sigma(\mathbf{F}) &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho^2+1} (\rho^2 - 2t)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t\,. = 2\pi\int_0^2 \left[\int_0^{\rho^2+1}(\rho^3 - 2\rho t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi\int_0^2 \left[\rho^3 t - \rho t^2\right]_0^{\rho^2+1}\mathrm{d}\rho = 2\pi\int_0^2 \left(\rho^3(\rho^2+1) - \rho(\rho^2+1)^2\right)\mathrm{d}\rho \\ &= -2\pi\int_0^2 (\rho^3+\rho)\,\mathrm{d}\rho = -2\pi\left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^2}{2}\right]_0^2 = -2\pi\left(\frac{2^4}{4} + \frac{2^2}{2}\right) = -12\pi\,. \end{aligned}$$

4. La serie data è a termini positivi e

$$\frac{2^n + n^2 + 1}{3^n + 2^n + 1} \sim \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{per } n \to +\infty\,.$$

Poiché $2/3 < 1$ la serie geometrica $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge. Di conseguenza, per il criterio del confronto asintotico, anche la serie di partenza converge.