Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II *Quarto Appello – 29 Agosto 2019*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

Es.1: 8 punti	**Es.2**: 9 punti	**Es.3**: 9 punti	**Es.4**: 6 punti	**Totale**

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{x+y} .$$

   (a) Determinare gli eventuali massimi e minimi di f .

   (b) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in corrispondenza del punto $\mathbf{x}_0 = (\ln 2, \ln 3)$.

   (c) Calcolare la derivata direzionale di f , lungo la direzione data dal versore $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, nel punto $\mathbf{x}_0 = (\ln 2, \ln 3)$.

2. Determinare, al variare del parametro reale k , l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 2(k+1)y' + 4ky = 2\mathrm{e}^{-2x} .$$

3. Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F} = (\mathrm{e}^x - x^2 y, xy^2 + \mathrm{e}^y)$ lungo la curva γ , orientata positivamente, data dal bordo della regione

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \, , \ 0 \leq x \leq 1 \, , \ 0 \leq y \leq 1\}.$$

4. Calcolare l'integrale

$$I = \iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

dove

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \, , \ z \geq 0\}.$$

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

---

1. (a) La funzione f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Pertanto, i suoi punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x+y} = 0 \\ \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{x+y} = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} \mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^y) = 0 \\ \mathrm{e}^y(1-\mathrm{e}^x) = 0 \end{cases}$$

dal quale si ha $x = y = 0$. Si ha così un solo punto critico $O \equiv (0,0)$. La matrice hessiana di f è

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x+y} & -\mathrm{e}^{x+y} \\ -\mathrm{e}^{x+y} & \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{x+y} \end{bmatrix}.$$

Pertanto

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\det H(0,0) = -1 < 0$, il punto O è un punto di sella. Di conseguenza, la funzione f non possiede né punti di massimo né punti di minimo.

(b) L'equazione del piano tangente cercato è

$$z = f(\mathbf{x}_0) + f_x(\mathbf{x}_0)(x - x_0) + f_y(\mathbf{x}_0)(y - y_0)$$

dove $f(\mathbf{x}_0) = f(\ln 2, \ln 3) = 2 + 3 - 6 = -1$, $f_x(\mathbf{x}_0) = f_x(\ln 2, \ln 3) = 2 - 6 = -4$ e $f_y(\mathbf{x}_0) = f_y(\ln 2, \ln 3) = 3 - 6 = -3$. Pertanto, si ha

$$z = -1 - 4(x - \ln 2) - 3(y - \ln 3)$$

ossia $4x + 3y - z - 4\ln 2 - 3\ln 3 + 1 = 0$.

(c) Poiché la funzione f è differenziabile nel punto P, la derivata direzionale cercata può essere calcolata mediante la formula del gradiente:

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle = -\frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{7}{\sqrt{2}}.$$

2. L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 2(k+1)\lambda + 4k = 0$ ammette le due soluzioni $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 2k$. Se $k \neq 1$, allora si hanno due soluzioni reali e distinte e l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{2x} + c_2 \mathrm{e}^{2kx} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se invece $k = 1$, allora si hanno due soluzioni reali e coicidenti e l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)\, \mathrm{e}^{2x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Si tratta ora di determinare (mediante il medoto di somiglianza) una soluzione particolare dell'equazione completa. Poiché $q(x) = 2\mathrm{e}^{-2x}$, si ha che l'esponente $\lambda = -2$ è una radice del polinomio caratteristico se e solo se $k = -1$ (risonanza). Abbiamo quindi i seguenti due casi.

Se $k = -1$, siamo nel caso della risonanza e quindi dobbiamo cercare una soluzione del tipo $y = Ax\mathrm{e}^{-2x}$. Poiché $y' = A\mathrm{e}^{-2x} - 2Ax\mathrm{e}^{-2x}$ e $y'' = -4A\mathrm{e}^{-2x} + 4Ax\mathrm{e}^{-2x}$, sostituendo nell'equazione completa si ha

$$-4A\mathrm{e}^{-2x} + 4Ax\mathrm{e}^{-2x} - 4Ax\mathrm{e}^{-2x} = 2\mathrm{e}^{-2x}$$

ossia $-4A = 2$, da cui si ha $A = -1/2$. Pertanto, l'integrale particolare cercato è

$$y = -\frac{1}{2}\, x\mathrm{e}^{-2x}.$$

Se $k \neq -1$, dobbiamo cercare una soluzione del tipo $y = A\mathrm{e}^{-2x}$. Poiché $y' = -2A\mathrm{e}^{-2x}$ e $y'' = 4A\mathrm{e}^{-2x}$, sostituendo nell'equazione completa si ha

$$4A\mathrm{e}^{-2x} + 4(k+1)A\mathrm{e}^{-2x} + 4kA\mathrm{e}^{-2x} = 2\mathrm{e}^{-2x}$$

ossia

$$4A + 4(k+1)A + 4kA = 2$$

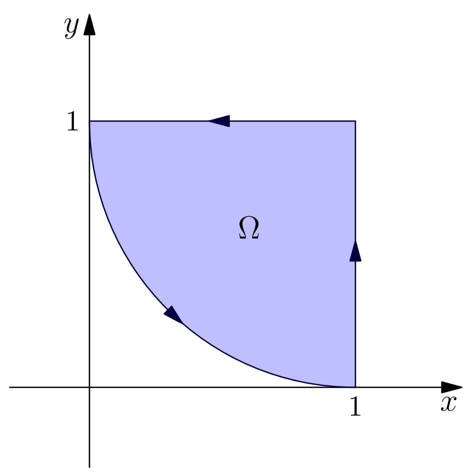
ossia $8(k+1)A = 2$, da cui $A = \frac{1}{4(k+1)}$. Pertanto, l'integrale particolare cercato è

$$y = \frac{1}{4(k+1)}\,\mathrm{e}^{-2x}\,.$$

In conclusione, l'integrale generale dell'equazione completa è

$$\begin{array}{lll} \text{per } k \neq \pm 1: & y(x) = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{2kx} + \dfrac{1}{4(k+1)}\,\mathrm{e}^{-2x} & c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ \text{per } k = 1: & y(x) = (c_1 + c_2 x)\,\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-2x} & c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ \text{per } k = -1: & y(x) = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{-2x} - \dfrac{1}{2}\,x\,\mathrm{e}^{-2x} & c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,. \end{array}$$

3. Il campo $\mathbf{F}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$ e la regione Ω



è xy-semplice. Pertanto, possiamo calcolare il lavoro richiesto utilizzando il teorema di Gauss-Green:

$$L_\gamma(\mathbf{F}) = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Considerando le coordinate polari centrate in $\mathbf{x}_0 = (1,1)$, date da

$$\begin{cases} x = 1 + \rho\cos\theta \\ y = 1 + \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \rho \geq 0\,,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\,,$$

la regione Ω corrisponde alla regione Ω' determinata dalle condizioni $0 \leq \rho \leq 1$ e $\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$. Pertanto, si ha

$$\begin{aligned}
L_\gamma(\mathbf{F}) &= \iint_{\Omega'} \left((1+\rho\cos\theta)^2 + (1+\rho\sin\theta)^2\right)\rho \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\
&= \iint_{\Omega'} \left(1 + 2\rho\cos\theta + \rho^2\cos^2\theta + 1 + 2\rho\sin\theta + \rho^2\sin^2\theta\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\
&= \iint_{\Omega'} \left(2\rho + 2\rho^2\cos\theta + 2\rho^2\sin\theta + \rho^3\right)\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \left(\int_0^1 \left(2\rho + 2\rho^2\cos\theta + 2\rho^2\sin\theta + \rho^3\right)\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \left[\rho^2 + \frac{2}{3}\rho^3\cos\theta + \frac{2}{3}\rho^3\sin\theta + \frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \mathrm{d}\theta \\
&= \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \left(\frac{5}{4} + \frac{2}{3}\cos\theta + \frac{2}{3}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \left[\frac{5}{4}\theta + \frac{2}{3}\sin\theta - \frac{2}{3}\cos\theta\right]_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \\
&= \frac{5}{8}\pi - \frac{4}{3}\,.
\end{aligned}$$

4. Rispetto alle coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad \rho \in \mathbb{R}\,,\ 0 \leq \varphi \leq \pi\,,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\,,$$

la regione Ω corrisponde alla regione Ω' determinata dalle condizioni $1 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Pertanto, si ha

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{\Omega'} \rho^2\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi}\,\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \iiint_{\Omega'} \rho^5|\sin\varphi|\,\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_1^2 \rho^5\,\mathrm{d}\rho \int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_1^2 \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\right]_0^{\pi/2} = \frac{21}{4}\pi^2\,.
\end{aligned}$$