Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — *Primo compito in itinere – 5 Novembre 2019*

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________

Es.1: 10 punti	**Es.2**: 8 punti	**Es.3**: 7 punti	**Es.4**: 5 punti	**Teor.**: 3 punti	**Totale**

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|\sqrt{|y|^3} + |y|\sqrt{|x|^3}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Stabilire se f è continua in $\mathbf{0} = (0,0)$.
   (b) Stabilire se f è derivabile in $\mathbf{0}$.
   (c) Stabilire se f possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{0}$.
   (d) Stabilire se f è differenziabile in $\mathbf{0}$.
   (e) Stabilire se $\mathbf{0}$ è un punto di minimo assoluto per f.

2. Si consideri la funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \left(x^2 + \sqrt{9-x^2-y^2}\right)\left(y^2 + \sqrt{x^2+y^2-2x-2y+1}\right).$$

   (a) Determinare il dominio naturale Ω di f.
   (b) Stabilire se f ammette massimo e minimo assoluti.
   (c) Stabilire se f è limitata.
   (d) Determinare, se esistono, i punti in cui f assume il valore minimo.

3. Si consideri la trasformazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$F(x,y) = (\mathrm{e}^x \cos^2 y, \mathrm{e}^x \sin^2 y).$$

   (a) Calcolare la matrice jacobiana della trasformazione F.
   (b) Determinare i punti in cui la trasformazione F è localmente invertibile.
   (c) Determinare le controimmagini del punto $Q \equiv (1,1)$ mediante F.

4. Calcolare l'integrale doppio

$$I = \iint_\Omega (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

   dove

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + (y-2)^2 \leq 4,\ x^2 + (y-2)^2 \geq 1\}.$$

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore e 20 minuti.*

Seconda parte: Teoria

1. Dare la definizione di curva regolare e di curva biregolare.

2. Dimostrare che una curva biregolare è regolare.

3. Scrivere i versori della terna intrinseca di una curva biregolare, rispetto a un parametro t qualsiasi.

Soluzioni

1. (a) Osservando che $x^2+y^2 \geq x^2$ e $x^2+y^2 \geq y^2$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, che quindi $\sqrt{x^2+y^2} \geq |x|$ e $\sqrt{x^2+y^2} \geq |y|$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si ha

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ (x,y) \neq \mathbf{0}\,.$$

Pertanto, per ogni $(x,y) \neq \mathbf{0}$, si ha

$$0 \leq \frac{|x|\sqrt{|y|^3}+|y|\sqrt{|x|^3}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \sqrt{|y|^3} + \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \sqrt{|x|^3} \leq \sqrt{|y|^3}+\sqrt{|x|^3}$$

e quindi

$$0 \leq \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} f(x) \leq \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} (\sqrt{|x|^3}+\sqrt{|y|^3}) = 0$$

da cui si ha

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x}) = 0 = f(\mathbf{0})\,.$$

Di conseguenza, la funzione f è continua in $\mathbf{0}$.
Si può giungere allo stesso risultato passando alle coordinate polari. Infatti, si ha

$$\begin{aligned}|F(\rho,\theta)| &= \frac{\rho|\cos\theta|\sqrt{\rho^3|\sin\theta|^3}+\rho|\sin\theta|\sqrt{\rho^3|\cos\theta|^3}}{\rho}\\ &= \rho^{3/2}(|\cos\theta|\sqrt{|\sin\theta|^3}+|\sin\theta|\sqrt{|\cos\theta|^3})\\ &\leq 2\rho^{3/2} \to 0 \qquad \text{per } \rho\to 0^+\,.\end{aligned}$$

Di conseguenza, si ha

$$\lim_{\rho\to 0^+} |F(\rho,\theta)| = 0$$

uniformemente rispetto a θ e quindi si ha

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x}) = 0\,.$$

Si ritrova così la continuità di f in $\mathbf{0}$.

(b) Poiché

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0\,,\end{aligned}$$

la funzione f possiede entrambe le derivate parziali in $\mathbf{0}$, e quindi f è derivabile in $\mathbf{0}$. In particolare, si ha $\nabla f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

(c) Sia $\mathbf{v} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ un versore. Allora, si ha

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{0}) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t\mathbf{v})-f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(ta,tb)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,\frac{|ta|\sqrt{|tb|^3}+|tb|\sqrt{|ta|^3}}{|t|}\\ &= \lim_{t\to 0} \operatorname{sign}(t)\ \sqrt{|t|}\ (|a|\sqrt{|b|^3}+|b|\sqrt{|a|^3}) = 0\,.\end{aligned}$$

Pertanto, la funzione f possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{0}$.

(d) Calcoliamo il limite

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0}) - \langle \nabla f(\mathbf{0}), \mathbf{x}\rangle}{\|\mathbf{x}\|} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{|x|\sqrt{|y|^3} + |y|\sqrt{|x|^3}}{x^2+y^2}\,.$$

Passando alle coordinate polari, si ha

$$\begin{aligned} |F(\rho,\theta)| &= \frac{|\rho\cos\theta|\sqrt{|\rho\sin\theta|^3} + |\rho\sin\theta|\sqrt{|\rho\cos\theta|^3}}{\rho^2} \\ &= \sqrt{\rho}\,(|\cos\theta|\sqrt{|\sin\theta|^3} + |\sin\theta|\sqrt{|\cos\theta|^3}) \\ &\le 2\sqrt{\rho} \to 0 \qquad \text{per } \rho \to 0^+\,. \end{aligned}$$

Pertanto, si ha

$$\lim_{\rho\to 0^+} |F(\rho,\theta)| = 0$$

uniformemente rispetto a θ e quindi si ha

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0}) - \langle \nabla f(\mathbf{0}), \mathbf{x}\rangle}{\|\mathbf{x}\|} = 0\,.$$

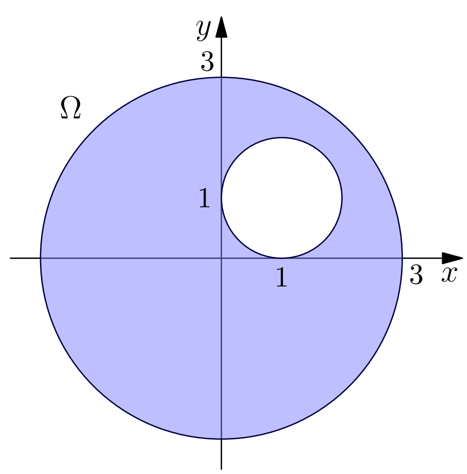
Questo significa che la funzione f è differenziabile in $\mathbf{0}$.

(e) Poiché $f(\mathbf{x}) \ge 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ e $f(\mathbf{0}) = 0$, si ha che $\mathbf{0}$ è un punto di minimo assoluto per f. Si verifica facilmente che la funzione f si annulla lungo entrambi gli assi coordinati.

2. (a) la funzione f è determinata quando

$$\begin{cases} 9 - x^2 - y^2 \ge 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \ge 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 \le 9 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \ge 1\,. \end{cases}$$

Pertanto, il dominio naturale Ω di f è dato dal disco di centro $O \equiv (0,0)$ e raggio $R = 3$, tolto il disco (aperto) di centro $C \equiv (1,1)$ e raggio $r = 1$, ossia



(b) Poiché f è una funzione continua su un insieme Ω chiuso e limitato (ossia compatto), allora, per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo assoluti su Ω.

(c) Ammettendo massimo e minimo su Ω, la funzione f è limitata su Ω.

(d) Poiché $f(x,y) \ge 0$ su tutto Ω, ogni punto in cui f si annulla è certamente un punto di minimo assoluto. I punti in cui f si annulla sono determinati dall'equazione

$$\left(x^2 + \sqrt{9 - x^2 - y^2}\right)\left(y^2 + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1}\right) = 0$$

da cui si ha

$$x^2 + \sqrt{9 - x^2 - y^2} = 0$$

oppure

$$y^2 + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1} = 0\,.$$

Nel primo caso, si ha $x = 0$ e $9 - x^2 - y^2 = 0$, ossia $x = 0$ e $y^2 = 9$, ossia $x = 0$ e $y = \pm 3$. Nel secondo caso, si ha $y = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, ossia $y = 0$ e $(x-1)^2 = 0$, ossia $y = 0$ e $x = 1$. Si hanno così tre pundi di minimo assoluto, dati da $P_1 \equiv (0, 3)$, $P_2 \equiv (0, -3)$ e $P_3 \equiv (1, 0)$.

3. (a) La trasformazione F è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$ e la sua matrice jacobiana è

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^x \cos^2 y & -2\mathrm{e}^x \cos y \sin y \\ \mathrm{e}^x \sin^2 y & 2\mathrm{e}^x \sin y \cos y \end{bmatrix}.$$

(b) La trasformazione F è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$ e

$$\det J_F = 2\mathrm{e}^{2x} \sin y \cos^3 y + 2\mathrm{e}^{2x} \sin^3 y \cos y = 2\mathrm{e}^{2x} \sin y \cos y (\cos^2 y + \sin^2 y) = \mathrm{e}^{2x} \sin 2y\,.$$

Pertanto $\det J_F = 0$ se e solo se $\sin 2y = 0$, ossia se e solo se $2y = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, ossia se e solo se $y = k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$. Di conseguenza, i punti in cui la trasformazione F è localmente invertibile sono tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ tranne i punti sulle infinite rette $r_k\,:\, y = k\frac{\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Le controimmagini del punto $Q \equiv (1, 1)$ mediante F sono date da tutti i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $F(x, y) = (1, 1)$, ossia tali che

$$\begin{cases} \mathrm{e}^x \cos^2 y = 1 \\ \mathrm{e}^x \sin^2 y = 1\,. \end{cases}$$

Sommando le due equazioni si trova $\mathrm{e}^x = 2$, e quindi $x = \ln 2$. Di conseguenza, il sistema diventa

$$\begin{cases} \cos^2 y = \frac{1}{2} \\ \sin^2 y = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} \cos y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad y = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Pertanto le conroimmagini cercate sono date dagli infiniti punti

$$P_k \equiv \left(\ln 2, (2k+1)\frac{\pi}{4} \right) \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

4. L'insieme Ω è l'anello di centro $C \equiv (0, 2)$ e raggi $R = 2$ e $r = 1$. Pertanto, considerando le coordinate polari centrate in C, date da

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = 2 + \rho \sin\theta \end{cases} \qquad \rho \geq 0\,,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\,,$$

l'integrale doppio dato diventa

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Omega'} (\rho\cos\theta + 2 + \rho\sin\theta)\, \rho \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} (2\rho + \rho^2\cos\theta + \rho^2\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\rho \\ &= \int_1^2 \left[2\rho\theta + \rho^2\sin\theta - \rho^2\cos\theta \right]_0^{2\pi} \mathrm{d}\rho \\ &= 4\pi \int_1^2 \rho\,\mathrm{d}\rho = 4\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_1^2 = 6\pi\,. \end{aligned}$$