Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — *Secondo compito in itinere – 16 Gennaio 2020*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

Es.1: 8 punti	**Es.2**: 8 punti	**Es.3**: 5 punti	**Es.4**: 9 punti	**Teor.**: 3 punti	**Totale**

1. Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F} = (x^2 - x^3y^2, y^2 + x^2y^3)$ lungo la curva γ, orientata negativamente, data dal bordo della regione

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ r^2 \le x^2 + y^2 \le 4r^2,\ y \ge 0,\ y \ge x\}.$$

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - \dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)}\, y(x) = \dfrac{(x-2)^3}{x^2-1} \\ y(0) = 8 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo massimale su cui è definita la soluzione trovata.

3. Determinare l'anello di convergenza della serie di Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4^n + 3^n}{3^n + 2^n}\, z^n .$$

4. (a) Calcolare l'integrale complesso

$$I = \int_\gamma z^3\, \mathrm{e}^{z^2+z}\, \sin(z\mathrm{e}^{\cos z} + \sinh z)\, \mathrm{d}z$$

dove γ è la curva di equazione $|z| = \pi$, orientata positivamente.

(b) i. Determinare e classificare i punti singolari della funzione

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} z} - 1}{z(z-1)(z^2+1)^2} .$$

ii. Calcolare l'integrale complesso

$$I = \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} z} - 1}{z(z-1)(z^2+1)^2}\, \mathrm{d}z$$

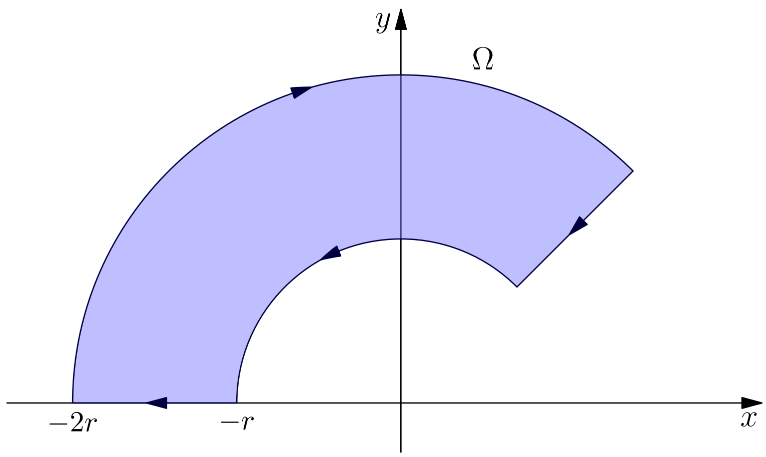
dove γ è la curva di equazione $|z - 2 - \mathrm{i}| = 3/2$, orientata positivamente.

5. **Teoria**: Enunciare e dimostrare il teorema di Gauss-Green per regioni piane y-semplici.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore e 20 minuti.*

1. Il campo $\mathbf{F}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ (e quindi anche di classe $\mathcal{C}^1$) su tutto $\mathbb{R}^2$ e Ω è una regione xy-semplice:



Pertanto, possiamo calcolare il lavoro di $\mathbf{F} = (x^2 - x^3y^2, y^2 + x^2y^3)$ lungo γ utilizzando il teorema di Gauss-Green. Essendo γ orientata negativamente, si ha

$$L_\gamma(\mathbf{F}) = -\iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_\Omega 2xy(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Passando alle coordinate polari, si ha che la regione Ω è descritta dalle condizioni $r \le \rho \ge 2r$ e $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \pi$. Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} L_\gamma(\mathbf{F}) &= -\int_r^{2r}\int_{\pi/4}^{\pi} 2\rho^2\cos\theta\sin\theta\,\rho^2\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = -\int_r^{2r}\rho^5\,\mathrm{d}\rho\int_{\pi/4}^{\pi}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_r^{2r}\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi} = \frac{64r^6 - r^6}{6}\,\frac{1}{2} = \frac{21}{4}\,r^6\,. \end{aligned}$$

2. L'equazione differenziale data è lineare del primo ordine, dove le funzioni

$$p(x) = -\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} \qquad \text{e} \qquad q(x) = \frac{(x-2)^3}{x^2-1}$$

sono definite e continue per $x \ne \pm 1, 2$. Quindi il problema di Cauchy dato possiede un'unica soluzione su tutto l'intervallo $(-1,1)$ (che contiene $x_0 = 0$). Tale intervallo è l'intervallo massimale richiesto. L'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \mathrm{e}^{\int \frac{(x+1)}{(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x}\left[\int \frac{(x-2)^3}{x^2-1}\,\mathrm{e}^{-\int \frac{(x+1)}{(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\right] \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

Poiché

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-2}\right)\mathrm{d}x = -2\ln|x-1| + 3\ln|x-2| = \ln\frac{|x-2|^3}{(x-1)^2}\,,$$

si ha

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{|x-2|^3}{(x-1)^2}\left[\int \frac{(x-2)^3}{x^2-1}\,\frac{(x-1)^2}{|x-2|^3}\,\mathrm{d}x + C\right] \\
&= \frac{(x-2)^3}{(x-1)^2}\left[\int \frac{x-1}{x+1}\,\mathrm{d}x + c\right] \\
&= \frac{(x-2)^3}{(x-1)^2}\left[\int \frac{x+1-2}{x+1}\,\mathrm{d}x + c\right] \\
&= \frac{(x-2)^3}{(x-1)^2}(x - 2\ln(x+1) + c) \qquad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}
$$

Imponendo infine la condizione iniziale $y(0) = 8$, si ha $8 = -8c$, ossia $c = -1$. Quindi, la soluzione cercata è

$$
y(x) = \frac{(x-2)^3}{(x-1)^2}(x - 2\ln(x+1) - 1)\,.
$$

3. Si ha

$$
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4^n+3^n}{3^n+2^n}\,z^n = \sum_{n\geq 1} \frac{4^{-n}+3^{-n}}{3^{-n}+2^{-n}}\,z^{-n} + \sum_{n\geq 0} \frac{4^n+3^n}{3^n+2^n}\,z^n = \sum_{n\geq 1} \frac{4^n+3^n}{3^n+2^n}\,\frac{1}{2^n z^n} + \sum_{n\geq 0} \frac{4^n+3^n}{3^n+2^n}\,z^n\,.
$$

Per la prima serie, posto $a_n = \frac{4^n+3^n}{3^n+2^n}\,\frac{1}{2^n z^n}$, si ha

$$
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{4^{n+1}+3^{n+1}}{3^{n+1}+2^{n+1}}\,\frac{1}{2^{n+1}z^{n+1}}\,\frac{3^n+2^n}{4^n+3^n}\,2^n z^n\right| = \frac{4^{n+1}+3^{n+1}}{4^n+3^n}\,\frac{3^n+2^n}{3^{n+1}+2^{n+1}}\,\frac{1}{2|z|} \to \frac{4}{3}\,\frac{1}{2|z|}
$$

per $n \to +\infty$. Quindi, questa serie converge per $\frac{2}{3}\frac{1}{|z|} < 1$, ossia per $|z| > 2/3$.

Per la seconda serie, posto $b_n = \frac{4^n+3^n}{3^n+2^n}\,z^n$, si ha

$$
\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{4^{n+1}+3^{n+1}}{3^{n+1}+2^{n+1}}\,z^{n+1}\,\frac{3^n+2^n}{4^n+3^n}\,\frac{1}{z^n}\right| = \frac{4^{n+1}+3^{n+1}}{4^n+3^n}\,\frac{3^n+2^n}{3^{n+1}+2^{n+1}}\,|z| \to \frac{4}{3}\,|z|
$$

per $n \to +\infty$. Questa serie, quindi, converge per $\frac{4}{3}\,|z| < 1$, ossia per $|z| < 3/4$.

In conclusione, l'anello di convergenza della serie di Laurent data è $2/3 < |z| < 3/4$.

4. (a) La funzione $f(z) = z^3\,\mathrm{e}^{z^2+z}\,\sin(z\mathrm{e}^{\cos z} + \sinh z)$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$. Quindi, per il teorema integrale di Cauchy, si ha $I = 0$

   (b) i. I punti singolari della funzione

$$
f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} z} - 1}{z(z-1)(z^2+1)^2} = \frac{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} z} - 1}{z(z-1)(z-\mathrm{i})^2(z+\mathrm{i})^2}
$$

sono $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = \mathrm{i}$ e $z_3 = -\mathrm{i}$.

$z_0 = 0$ è una singolarità eliminabile, poiché

$$
\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1 + \pi \mathrm{i} z + o(z) - 1}{z(z-1)(z^2+1)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\pi\mathrm{i} + o(1)}{(z-1)(z^2+1)^2} = -\pi\mathrm{i} \neq \infty\,.
$$

$z_1 = 1$ è un polo del primo ordine, poiché

$$
\lim_{z\to 1} (z-1) f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} z} - 1}{z(z^2+1)^2} = \frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} - 1}{4} = \frac{-1-1}{4} = -\frac{1}{2} \neq \infty\,.
$$

$z_2 = \mathrm{i}$ e $z_3 = -\mathrm{i}$ sono due poli del secondo ordine, poiché

$$
\lim_{z\to \mathrm{i}} (z-\mathrm{i})^2 f(z) = \lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} z} - 1}{z(z-1)(z+\mathrm{i})^2} = \frac{\mathrm{e}^{-\pi} - 1}{\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)(2\mathrm{i})^2} = (1 - \mathrm{e}^{-\pi})\,\frac{1-\mathrm{i}}{8} \neq \infty
$$

$$
\lim_{z\to -\mathrm{i}} (z+\mathrm{i})^2 f(z) = \lim_{z\to -\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} z} - 1}{z(z-1)(z-\mathrm{i})^2} = \frac{\mathrm{e}^{\pi} - 1}{-\mathrm{i}(-\mathrm{i}-1)(-2\mathrm{i})^2} = (\mathrm{e}^{\pi} - 1)\,\frac{1+\mathrm{i}}{8} \neq \infty\,.
$$

ii. La curva γ è la circonferenza di centro $w_0 = 2 + \mathrm{i}$ e di raggio $R = 3/2$. Poiché

$$
\begin{aligned}
d(z_0, w_0) &= |z_0 - w_0| = |2 + \mathrm{i}| = \sqrt{5} > R \\
d(z_1, w_0) &= |z_1 - w_0| = |1 - 2 - \mathrm{i}| = |1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2} < R \\
d(z_2, w_0) &= |z_2 - w_0| = |\mathrm{i} - 2 - \mathrm{i}| = 2 > R \\
d(z_3, w_0) &= |z_3 - w_0| = |-\mathrm{i} - 2 - \mathrm{i}| = 2|1 + \mathrm{i}| = 2\sqrt{2} > R\,,
\end{aligned}
$$

si ha che nessuna singolarità di f si trova su γ e solo z_1 si trova all'interno di γ. Poiché γ è orientata positivamente, per il teorema dei residui si ha

$$I = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f, z_1)\,.$$

Poiché $z_1 = 1$ è un polo del primo ordine, si ha

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \lim_{z \to 1} (z - 1) f(z) = -\frac{1}{2} \neq \infty\,.$$

Pertanto

$$I = -\pi\mathrm{i}\,.$$