

Cognome: _____

Matricola: _____

Nome: _____

Es.1: 6 punti	Es.2: 8 punti	Es.3: 8 punti	Es.4: 8 punti	Teor.: 3 punti	Totale

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = xe^y - ye^x.$$

- (a) Stabilire se $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$ è un punto stazionario di f . In caso affermativo, determinare la natura di tale punto.
- (b) Calcolare la derivata direzionale di f in $\mathbf{0} = (0, 0)$ lungo la direzione individuata dal vettore $\mathbf{v} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
- (c) Stabilire se l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce una funzione implicita $y = g(x)$ in un opportuno intorno di $x_0 = 0$. In caso affermativo, scrivere l'equazione della retta tangente in corrispondenza di $x_0 = 0$.
2. Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F} = (x^2 - x^3y^2, y^2 + x^2y^3)$ lungo la curva γ , orientata negativamente, data dal bordo della regione

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4r^2, y \geq 0, y \geq x\}.$$

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} y(x) = \frac{(x-2)^3}{x^2-1} \\ y(0) = 8 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo massimale su cui è definita la soluzione trovata.

4. (a) Determinare e classificare i punti singolari della funzione

$$f(z) = \frac{e^{\pi iz} - 1}{z(z-1)(z^2+1)^2}.$$

- (b) Calcolare l'integrale complesso

$$I = \int_{\gamma} \frac{e^{\pi iz} - 1}{z(z-1)(z^2+1)^2} dz$$

dove γ è la curva di equazione $|z - 2 - i| = 3/2$, orientata positivamente.

5. **Teoria:** Enunciare e dimostrare il teorema di Gauss-Green per regioni piane y -semplici.

Istruzioni. Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

Tempo. 2 ore e 20 minuti.

1. La funzione f è di classe C^∞ su tutto \mathbb{R}^2 . Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y) = xe^y - ye^x.$$

(a) Poiché

$$\begin{cases} f_x(x, y) = e^y - ye^x \\ f_y(x, y) = xe^y - e^x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} f_x(1, 1) = 0 \\ f_y(1, 1) = 0, \end{cases}$$

si ha che $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$ è un punto stazionario di f . Inoltre, essendo

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} -ye^x & e^y - e^x \\ e^y - e^x & xe^y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_f(1, 1) = \begin{bmatrix} -e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix},$$

si ha che la matrice hessiana $H_f(1, 1)$ è indefinita e che \mathbf{x}_0 è un punto di sella.

(b) Poiché la funzione f è differenziabile in $\mathbf{0}$ possiamo calcolare la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{0})$ mediante la formula del gradiente:

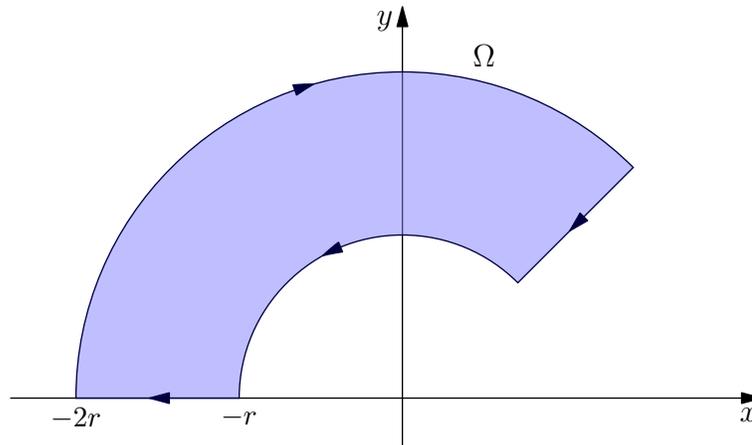
$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{0}) = \langle \nabla f(\mathbf{0}), \mathbf{v} \rangle = \langle (1, -1), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rangle = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

(c) La funzione f è di classe C^1 su tutto \mathbb{R}^2 e $f_y(0, 0) = -1 \neq 0$. Quindi, per il teorema del Dini, l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce un'unica funzione implicita $y = g(x)$ in un opportuno intorno di $x_0 = 0$, tale che $g(0) = 0$. Inoltre, si ha

$$g'(0) = -\frac{f_x(0, 0)}{f_y(0, 0)} = 1.$$

Quindi l'equazione della retta tangente in corrispondenza di $x_0 = 0$ è $y = x$.

2. Il campo \mathbf{F} è di classe C^∞ (e quindi anche di classe C^1) su tutto \mathbb{R}^2 e Ω è una regione xy -semplice:



Pertanto, possiamo calcolare il lavoro di $\mathbf{F} = (x^2 - x^3y^2, y^2 + x^2y^3)$ lungo γ utilizzando il teorema di Gauss-Green. Essendo γ orientata negativamente, si ha

$$L_{\gamma}(\mathbf{F}) = - \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_{\Omega} 2xy(x^2 + y^2) dx dy.$$

Passando alle coordinate polari, si ha che la regione Ω è descritta dalle condizioni $r \leq \rho \leq 2r$ e $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$. Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} L_\gamma(\mathbf{F}) &= - \int_r^{2r} \int_{\pi/4}^{\pi} 2\rho^2 \cos \theta \sin \theta \rho^2 \rho \, d\rho \, d\theta = - \int_r^{2r} \rho^5 \, d\rho \int_{\pi/4}^{\pi} \sin 2\theta \, d\theta \\ &= - \left[\frac{\rho^6}{6} \right]_r^{2r} \left[-\frac{\cos 2\theta}{2} \right]_{\pi/4}^{\pi} = \frac{64r^6 - r^6}{6} \frac{1}{2} = \frac{21}{4} r^6. \end{aligned}$$

3. L'equazione differenziale data è lineare del primo ordine, dove le funzioni

$$p(x) = -\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} \quad \text{e} \quad q(x) = \frac{(x-2)^3}{x^2-1}$$

sono definite e continue per $x \neq \pm 1, 2$. Quindi il problema di Cauchy dato possiede un'unica soluzione su tutto l'intervallo $(-1, 1)$ (che contiene $x_0 = 0$). Tale intervallo è l'intervallo massimale richiesto. L'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = e^{\int \frac{(x+1)}{(x-1)(x-2)} dx} \left[\int \frac{(x-2)^3}{x^2-1} e^{-\int \frac{(x+1)}{(x-1)(x-2)} dx} dx + c \right] \quad c \in \mathbb{R}.$$

Poiché

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} dx = \int \left(\frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-2} \right) dx = -2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-2| = \ln \frac{|x-2|^3}{(x-1)^2},$$

si ha

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{|x-2|^3}{(x-1)^2} \left[\int \frac{(x-2)^3}{x^2-1} \frac{(x-1)^2}{|x-2|^3} dx + c \right] \\ &= \frac{(x-2)^3}{(x-1)^2} \left[\int \frac{x-1}{x+1} dx + c \right] \\ &= \frac{(x-2)^3}{(x-1)^2} \left[\int \frac{x+1-2}{x+1} dx + c \right] \\ &= \frac{(x-2)^3}{(x-1)^2} (x-2 \ln(x+1) + c) \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Imponendo infine la condizione iniziale $y(0) = 8$, si ha $8 = -8c$, ossia $c = -1$. Quindi, la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{(x-2)^3}{(x-1)^2} (x-2 \ln(x+1) - 1).$$

4. (a) I punti singolari della funzione

$$f(z) = \frac{e^{\pi iz} - 1}{z(z-1)(z^2+1)^2} = \frac{e^{\pi iz} - 1}{z(z-1)(z-i)^2(z+i)^2}$$

sono $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = i$ e $z_3 = -i$.

$z_0 = 0$ è una singolarità eliminabile, poiché

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 + \pi iz + o(z) - 1}{z(z-1)(z^2+1)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi i + o(1)}{(z-1)(z^2+1)^2} = -\pi i \neq \infty.$$

$z_1 = 1$ è un polo del primo ordine, poiché

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^{\pi iz} - 1}{z(z^2+1)^2} = \frac{e^{\pi i} - 1}{4} = \frac{-1 - 1}{4} = -\frac{1}{2} \neq \infty.$$

$z_2 = i$ e $z_3 = -i$ sono due poli del secondo ordine, poiché

$$\lim_{z \rightarrow i} (z-i)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{\pi iz} - 1}{z(z-1)(z+i)^2} = \frac{e^{-\pi} - 1}{i(i-1)(2i)^2} = (1 - e^{-\pi}) \frac{1-i}{8} \neq \infty$$

$$\lim_{z \rightarrow -i} (z+i)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^{\pi iz} - 1}{z(z-1)(z-i)^2} = \frac{e^{\pi} - 1}{-i(-i-1)(-2i)^2} = (e^{\pi} - 1) \frac{1+i}{8} \neq \infty.$$

(b) La curva γ è la circonferenza di centro $w_0 = 2 + i$ e di raggio $R = 3/2$. Poiché

$$d(z_0, w_0) = |z_0 - w_0| = |2 + i| = \sqrt{5} > R$$

$$d(z_1, w_0) = |z_1 - w_0| = |1 - 2 - i| = |1 + i| = \sqrt{2} < R$$

$$d(z_2, w_0) = |z_2 - w_0| = |i - 2 - i| = 2 > R$$

$$d(z_3, w_0) = |z_3 - w_0| = |-i - 2 - i| = 2|1 + i| = 2\sqrt{2} > R,$$

si ha che nessuna singolarità di f si trova su γ e solo z_1 si trova all'interno di γ . Poiché γ è orientata positivamente, per il teorema dei residui si ha

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1).$$

Poiché $z_1 = 1$ è un polo del primo ordine, si ha

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)f(z) = -\frac{1}{2} \neq \infty.$$

Pertanto

$$I = -\pi i.$$