Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — *Primo appello – 5 Febbraio 2020*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

Es.1: 8 punti	**Es.2**: 8 punti	**Es.3**: 6 punti	**Es.4**: 8 punti	**Teor.**: 4 punti	**Totale**

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\, \mathrm{e}^{\frac{2xy}{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$
   (a) Stabilire se f è continua in $\mathbf{0} = (0,0)$.
   (b) Stabilire se f è derivabile in $\mathbf{0}$.
   (c) Stabilire se f è differenziabile in $\mathbf{0}$.
   (d) Stabilire se $\mathbf{0}$ è un punto stazionario di f. In caso affermativo, stabilirne la natura.

2. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y''(x) - 7y'(x) + 6y(x) = 4\mathrm{e}^{2x} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 6\,. \end{cases}$$
   Scrivere poi la serie di Taylor centrata in $x_0 = 0$ della soluzione trovata e determinarne il raggio di convergenza.

3. Determinare il baricentro della superficie Σ determinata dalle condizioni $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

4. (a) Determinare e classificare i punti singolari delle funzioni
$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{z^2(z+2\mathrm{i})} \qquad \text{e} \qquad g(z) = \frac{\sin z}{z^2(z+2\mathrm{i})}\,.$$
   (b) Calcolare gli integrali complessi
$$I_1 = \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z^2(z+2\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z \qquad \text{e} \qquad I_2 = \int_\gamma \frac{\sin z}{z^2(z+2\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z$$
   dove γ è la curva di equazione $|z - \mathrm{i}| = 2$, orientata positivamente.

5. **Teoria**
   (a) Enunciare il *teorema di Stokes*.
   (b) Scrivere le *formule di Frenet-Serret* e dedurle.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore e 20 minuti.*

---

1. (a) Passando alle coordinate polari, si ha

$$|F(\rho,\theta)| = \rho^2\,|\sin\theta\cos\theta|\,\mathrm{e}^{2\sin\theta\cos\theta} = \rho^2\,|\sin\theta\cos\theta|\,\mathrm{e}^{\sin 2\theta} \leq \mathrm{e}\,\rho^2 \to 0 \qquad \text{per } \rho \to 0^+ .$$

Di conseguenza, si ha

$$\lim_{\rho\to 0^+} |F(\rho,\theta)| = 0$$

uniformemente rispetto a θ e quindi si ha

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x}) = 0 .$$

Pertanto, la funzione f è continua in $\mathbf{0}$.

(b) Poiché

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0 ,\end{aligned}$$

la funzione f possiede entrambe le derivate parziali in $\mathbf{0}$, e quindi f è derivabile in $\mathbf{0}$. In particolare, si ha $\nabla f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

(c) Calcoliamo il limite

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{0})-\langle\nabla f(\mathbf{0}),\mathbf{x}\rangle}{\|\mathbf{x}\|} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{xy\,\mathrm{e}^{\frac{2xy}{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} .$$

Passando alle coordinate polari, si ha

$$|F(\rho,\theta)| = \frac{\rho^2\,|\sin\theta\cos\theta|\,\mathrm{e}^{2\sin\theta\cos\theta}}{\rho} = \rho\,|\sin\theta\cos\theta|\,\mathrm{e}^{\sin 2\theta} \leq \mathrm{e}\,\rho \to 0 \qquad \text{per } \rho\to 0^+ .$$

Pertanto, si ha

$$\lim_{\rho\to 0^+} |F(\rho,\theta)| = 0$$

uniformemente rispetto a θ e quindi si ha

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{0})-\langle\nabla f(\mathbf{0}),\mathbf{x}\rangle}{\|\mathbf{x}\|} = 0 .$$

Questo significa che la funzione f è differenziabile in $\mathbf{0}$.

(d) Il punto $\mathbf{0}$ è stazionario di f poiché, come abbiamo visto in uno dei punti precedenti, f é derivabile in $\mathbf{0}$ e $\nabla f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Poiché l'esponenziale è sempre positivo, il segno di f coincide con il segno di xy, che è positivo nel primo e terzo quadrante ed è negativo nel secondo e quarto quadrante. Di conseguenza, in un qualunque intorno di $\mathbf{0}$ la funzione $f(x,y) - f(0,0) = f(x,y)$ assume sempre sia valori positivi sia valori negativi. Questo significa che il punto $\mathbf{0}$ è un punto di sella per f.

2. L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$. Poiché le sue radici sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$, l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_{om}(x) = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{6x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa. Utilizzando il metodo di somiglianza, essendo $q(x) = 4\mathrm{e}^{2x}$ e $2 \neq \lambda_{1,2}$, possiamo cercare una soluzione del tipo $y(x) = A\mathrm{e}^{2x}$. Quindi $y'(x) = 2A\mathrm{e}^{2x}$ e $y''(x) = 4A\mathrm{e}^{2x}$. Sostituendo nell'equazione completa, si ha

$$4A\mathrm{e}^{2x} - 14A\mathrm{e}^{2x} + 6A\mathrm{e}^{2x} = 4\mathrm{e}^{2x}.$$

Poiché l'esponenziale non si annulla mai, si ha $-4A = 4$, ossia $A = -1$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa è

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{6x} - \mathrm{e}^{2x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali, si ha

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 6 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 - 1 = 2 \\ c_1 + 6c_2 - 2 = 6 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ c_1 + 6c_2 = 8. \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione alla seconda, si ha $c_2 = 1$, e quindi $c_1 = 2$. Pertanto, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{6x} - \mathrm{e}^{2x}.$$

Poiché compaiono solo funzioni esponenziali, la serie di Taylor centrata in $x_0 = 0$ di questa funzione ha raggio di convergenza $+\infty$, e tale serie è data da

$$y(x) = 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{6x} - \mathrm{e}^{2x} = 2\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} 6^n \frac{x^n}{n!} - \sum_{n\geq 0} 2^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} (2 + 6^n - 2^n) \frac{x^n}{n!}.$$

3. Se S è la sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio r, allora la superficie Σ è la parte di S compresa nel primo e secondo ottante. Quindi, abbiamo le equazioni parametriche

$$\Sigma : \begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \varphi \in [0, \pi/2] \\ \theta \in [0, \pi]. \end{array}$$

L'area di Σ è

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \frac{1}{4}\mathcal{A}(S) = \pi r^2.$$

Sia $G \equiv (x_G, y_G, z_G)$ il baricentro di Σ. Poiché Σ è simmetrica rispetto al piano yz, si ha $x_g = 0$. Inoltre, essendo $\|\mathbf{N}\| = r^2 \sin\varphi$, si ha

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{\mathcal{A}(\Sigma)} \iint_\Sigma y \, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} r\sin\varphi\sin\theta \, r^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{r}{\pi} \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\cos\varphi\sin\varphi \right]_0^{\pi/2} \big[-\cos\theta \big]_0^{\pi} = \frac{r}{\pi} \frac{\pi}{4} 2 = \frac{r}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{\mathcal{A}(\Sigma)} \iint_\Sigma z \, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} r\cos\varphi \, r^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{\pi r}{2\pi} \big[-\cos\varphi \big]_0^{\pi/2} = \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Se si osserva che la superficie Σ è simmetrica rispetto al piano di equazione $y = z$, si può calcolare solo una delle due coordinate precedenti. In conclusione, si ha

$$G \equiv \left(0, \frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right).$$

4. (a) In entrambi i casi, i punti singolari sono $z_0 = 0$ e $z_1 = -2\mathrm{i}$.
   $z_0 = 0$ è un polo del secondo ordine per f, essendo

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{e}^z}{z + 2\mathrm{i}} = \frac{1}{2\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{2},$$

   ed è un polo del primo ordine per g, essendo

$$\lim_{z\to 0} z g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z(z + 2\mathrm{i})} = \frac{1}{2\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{2},$$

   $z_1 = -2\mathrm{i}$ è un polo del primo ordine per entrambe le funzioni.

(b) La curva γ è la circonferenza di centro $w_0 = \mathrm{i}$ e di raggio $R = 2$. Pertanto, i due punti singolari non si trovano su γ e solo z_0 si trova all'interno di γ. Di conseguenza, essendo γ orientata positivamente, per il teorema dei residui si ha

$$I_1 = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,0) \qquad \text{e} \qquad I_2 = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(g,0)\,.$$

Poiché $z_0 = 0$ è un polo del secondo ordine per f, si ha

$$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{e}^z}{z+2\mathrm{i}} = \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{e}^z(z+2\mathrm{i}) - \mathrm{e}^z}{(z+2\mathrm{i})^2} = \frac{2\mathrm{i}-1}{(2\mathrm{i})^2} = \frac{1-2\mathrm{i}}{4}$$

e quindi

$$I_1 = 2\pi\mathrm{i}\,\frac{1-2\mathrm{i}}{4} = \frac{2+\mathrm{i}}{2}\,\pi\,.$$

Poiché $z_0 = 0$ è un polo del primo ordine per g, si ha

$$\mathrm{Res}(g,0) = \lim_{z\to 0} z g(z) = -\frac{\mathrm{i}}{2}$$

e quindi

$$I_2 = 2\pi\mathrm{i}\,\frac{-\mathrm{i}}{2} = \pi\,.$$