Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II *Secondo appello – 24 Giugno 2020*

Istruzioni. *Rispondere alle seguenti domande, tenendo conto che si possono avere più risposte corrette (eventualmente nessuna). Non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici, strumenti di calcolo e telefonini.*
Punteggi. *Ogni domanda vale 3 punti.*
Tempo. *1 ora.*

1. La funzione $f(x,y) = \sqrt[4]{x^2+y^2}$
   (a) è definita su tutto $\mathbb{R}^2$
   (b) è continua in $(0,0)$
   (c) è derivabile in $(0,0)$
   (d) è differenziabile in $(0,0)$
   (e) è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$
   (f) ha un punto di minimo in $(0,0)$.

2. La funzione $F(x,y) = \mathrm{e}^{xy} - xy$
   (a) ha un grafico simmetrico rispetto all'origine
   (b) ha un grafico simmetrico rispetto al piano di equazione $y = x$
   (c) possiede un solo punto stazionario in $(0,0)$
   (d) possiede infiniti punti stazionari
   (e) $\nabla f(1,1) = (0,0)$
   (f) ha piano tangente $z = (\mathrm{e}-1)(x+y-1)$ nel punto $(1,1)$

3. Sia $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$. La trasformazione $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definita da $F(x,y) = (x-y, x+y)$
   (a) è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$
   (b) è localmente invertibile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$
   (c) è globalmente invertibile
   (d) trasforma il quadrato Q in un quadrato di area doppia
   (e) trasforma il quadrato Q nel quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,-1)$, $(2,0)$, $(0,2)$
   (f) trasforma il quadrato Q nel quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(-1,1)$.

4. Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x-2y \le 2\}$. Allora l'integrale doppio
$$I = \iint_\Omega x\,y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
vale

(a) π
(b) 2π
(c) 3π
(d) 4π

5. Data la curva γ di equazione parametrica
$$f(t) = (t - \mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}, t + \mathrm{e}^{-t}) \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$
determinarne la terna intrinseca nel punto $P = f(0)$.

(a) $\mathbf{T} = (0,1,0)$, $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$
(b) $\mathbf{T} = (0,1,0)$, $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,-1)$, $\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$
(c) $\mathbf{T} = (0,-1,0)$, $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,-1)$, $\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$
(d) $\mathbf{T} = (0,-1,0)$, $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$, $\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,-1)$

6. Il campo vettoriale $\mathbf{F} = (\, y^2z^2,\ 2xyz^2,\ 2xy^2z\,)$

(a) è irrotazionale su $\mathbb{R}^2$
(b) è conservativo su $\mathbb{R}^2$
(c) non ammette funzione potenziale
(d) ammette potenziale $U(x,y,z) = xy^2z^2 + x^2yz^2 + x^2y^2z$
(e) il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 2 = 0$ è 2π
(f) il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva $f(t) = (1+t, 1-t, t)$, $t \in [1,2]$, è 12.

7. L'equazione differenziale
$$y' = xy - \mathrm{e}^{x^2}$$

(a) è a variabili separabili
(b) ammette infinite soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$
(c) ammette esattamente una soluzione per ogni $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, con $y(x_0) = y_0$
(d) per ogni soluzione, si ha $y'(0) = 1$
(e) se $y''(1) = \mathrm{e}$, allora $y(1) = 2\mathrm{e}$, $y'(1) = \mathrm{e}$
(f) se $y''(1) = \mathrm{e}$, allora $y(1) = \mathrm{e}$, $y'(1) = 2\mathrm{e}$.

8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica che sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ è definita da $f(x) = x \sin x$ e sia
$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
la sua serie di Fourier.

(a) La serie $F(x)$ converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(b) Si ha $F(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(c) $F(\pi) = \pi$.

(d) $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(e) $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

(f) $a_0 = 2$.

9. L'anello di convergenza della serie di Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^n + 1}$$

è

(a) $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < z < \frac{1}{2} \right\}$

(b) $A = \{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2 \}$

(c) $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 1 \right\}$

(d) nessuna delle risposte precedenti.

10. La funzione

$$f(z) = z^2 \, \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} + \frac{1}{z}$$

(a) è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$

(b) possiede solo un polo semplice

(c) possiede solo una singolarità essenziale

(d) $\mathrm{Res}(f, 0) = 1$

(e) $\mathrm{Res}(f, 0) = \frac{7}{6}$

(f) $\int_{|z-2|=1} f(z) \, \mathrm{d}z = \frac{7}{3}\pi \mathrm{i}$.

Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — *Secondo appello – 24 Giugno 2020*

Istruzioni. *Rispondere alle seguenti domande, tenendo conto che si possono avere più risposte corrette (eventualmente nessuna). Non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici, strumenti di calcolo e telefonini.*
Punteggi. *Ogni domanda vale 3 punti.*
Tempo. *1 ora.*

1. La funzione $f(x,y) = \sqrt[4]{x^2+y^2}$

   (✗) è definita su tutto $\mathbb{R}^2$
   (✗) è continua in $(0,0)$
   (c) è derivabile in $(0,0)$
   (d) è differenziabile in $(0,0)$
   (e) è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$
   (✗) ha un punto di minimo in $(0,0)$.

2. La funzione $F(x,y) = \mathrm{e}^{x\,y} - x\,y$

   (a) ha un grafico simmetrico rispetto all'origine
   (✗) ha un grafico simmetrico rispetto al piano di equazione $y = x$
   (c) possiede un solo punto stazionario in $(0,0)$
   (✗) possiede infiniti punti stazionari
   (e) $\nabla f(1,1) = (0,0)$
   (✗) ha piano tangente $z = (\mathrm{e}-1)(x+y-1)$ nel punto $(1,1)$

3. Sia $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$. La trasformazione $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definita da $F(x,y) = (x-y, x+y)$

   (✗) è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$
   (✗) è localmente invertibile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$
   (✗) è globalmente invertibile
   (✗) trasforma il quadrato Q in un quadrato di area doppia
   (e) trasforma il quadrato Q nel quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,-1)$, $(2,0)$, $(0,2)$
   (✗) trasforma il quadrato Q nel quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(-1,1)$.

4. Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x-2y \le 2\}$. Allora l'integrale doppio

$$I = \iint_\Omega x\,y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

vale

(a) π

(b) 2π

(c) 3π

(✗) 4π .

5. Data la curva γ di equazione parametrica

$$f(t) = (t - \mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}, t + \mathrm{e}^{-t}) \qquad t \in \mathbb{R},$$

determinarne la terna intrinseca nel punto $P = f(0)$.

(a) $\mathbf{T} = (0,1,0)$, $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$

(b) $\mathbf{T} = (0,1,0)$, $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,-1)$, $\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$

(c) $\mathbf{T} = (0,-1,0)$, $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,-1)$, $\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$

(✗) $\mathbf{T} = (0,-1,0)$, $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$, $\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,-1)$

6. Il campo vettoriale $\mathbf{F} = (\, y^2z^2,\ 2xyz^2,\ 2xy^2z\,)$

(✗) è irrotazionale su $\mathbb{R}^2$

(✗) è conservativo su $\mathbb{R}^2$

(c) non ammette funzione potenziale

(d) ammette potenziale $U(x,y,z) = xy^2z^2 + x^2yz^2 + x^2y^2z$

(e) il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 2 = 0$ è 2π

(✗) il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva $f(t) = (1+t, 1-t, t)$, $t \in [1,2]$, è 12 .

7. L'equazione differenziale

$$y' = xy - \mathrm{e}^{x^2}$$

(a) è a variabili separabili

(✗) ammette infinite soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$

(✗) ammette esattamente una soluzione per ogni $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, con $y(x_0) = y_0$

(✗) per ogni soluzione, si ha $y'(0) = 1$

(✗) se $y''(1) = \mathrm{e}$, allora $y(1) = 2\mathrm{e}$, $y'(1) = \mathrm{e}$

(f) se $y''(1) = \mathrm{e}$, allora $y(1) = \mathrm{e}$, $y'(1) = 2\mathrm{e}$.

8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica che sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ è definita da $f(x) = x \sin x$ e sia

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

la sua serie di Fourier.

(✗) La serie $F(x)$ converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(✗) Si ha $F(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(c) $F(\pi) = \pi$.

(d) $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(✗) $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

(✗) $a_0 = 2$.

9. L'anello di convergenza della serie di Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^n + 1}$$

è

(a) $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < z < \frac{1}{2} \right\}$

(✗) $A = \{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2 \}$

(c) $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 1 \right\}$

(d) nessuna delle risposte precedenti.

10. La funzione

$$f(z) = z^2 \, \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} + \frac{1}{z}$$

(a) è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$

(b) possiede solo un polo semplice

(✗) possiede solo una singolarità essenziale

(d) $\mathrm{Res}(f, 0) = 1$

(✗) $\mathrm{Res}(f, 0) = \frac{7}{6}$

(f) $\int_{|z-2|=1} f(z) \, \mathrm{d}z = \frac{7}{3}\pi \mathrm{i}$.