POLITECNICO DI MILANO
INGEGNERIA INDUSTRIALE E DELL'INFORMAZIONE

ANALISI MATEMATICA II — *Terzo appello – 23 Luglio 2020*

Istruzioni. *Segnare le risposte corrette, tenendo conto che le domande a risposta multipla possono avere più risposte esatte (eventualmente nessuna). Non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici, strumenti di calcolo simbolico e telefonini.*
Punteggi. *Le domande a risposta multipla valgono 3 punti (ogni singola risposta vale 1/2 punto). Le domande aperte valgono 4 punti.*
Tempo. *1 ora.*

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+xy+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) La funzione f è continua in $\mathbf{0} = (0,0)$.
   (b) La funzione f è derivabile in $\mathbf{0}$ e $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
   (c) Il punto $\mathbf{0}$ è un punto stazionario di f.
   (d) Il punto $\mathbf{0}$ è un punto di sella per f.
   (e) La funzione f è differenziabile in $\mathbf{0}$.
   (f) La funzione f è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

2. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione definita da $F(x,y) = (x^2+y^2, 2xy)$.

   (a) Esistono infinti punti in cui la trasformazione F non è localmente invertibile.
   (b) La trasformazione F è localmente invertibile nel punto $A = (1,2)$.
   (c) Il punto $O = (0,0)$ possiede esattamente una controimmagine mediante F.
   (d) Il punto $P = (1,1)$ possiede esattamente due controimmagini mediante F.
   (e) La trasformazione F è iniettiva.
   (f) La trasformazione F è suriettiva.

3. Dati $r, h \in \mathbb{R}$, $r, h > 0$, calcolare l'integrale triplo

$$I = \iiint_\Omega xyz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

   dove

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 \leq r^2 \, , \ 0 \leq y \leq x \, , \ 0 \leq z \leq h\} \, .$$

4. Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t^2 \cos t \\ y = t^2 \sin t \\ z = 2t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi] \,.$$

   (a) La curva γ è un'elica cilindrica.
   (b) La curva γ giace sulla superficie di equazione $z = 2\sqrt[4]{x^2 + y^2}$.
   (c) La curva γ è regolare.
   (d) La curva γ ha lunghezza $L = 4\pi - \frac{8}{3}\pi^3$.
   (e) La curva γ ha una lunghezza $L \leq 2\pi(2 + \pi^2)$.
   (f) Il versore tangente per $t = \pi$ è $\mathbf{t}(\pi) = \frac{(-2\pi, -\pi^2, 2)}{2+\pi^2}$.

5. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = (x + \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y, y - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^z, z - \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^z)$ attraverso il triangolo che ha per vertici $A \equiv (1, 0, 0)$, $B \equiv (0, 1, 0)$ e $C \equiv (0, 0, 1)$, orientato coerentemente con l'orientamento del bordo dato da ABC .

6. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3\,y' + 2y = \mathrm{e}^x \cos x - x^2 \\ y'(0) = 2 \\ y(0) = 1 \,. \end{cases}$$

   (a) Esiste esattamente una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$.
   (b) La soluzione passa per il punto $(0, 1)$.
   (c) La soluzione ha retta tangente in $x_0 = 0$ di equazione $y = 2x + 1$.
   (d) La derivata seconda della soluzione in $x_0 = 0$ è $y''(0) = 5$.
   (e) La derivata terza della soluzione in $x_0 = 0$ è $y'''(0) = 12$.
   (f) La soluzione ha in $x_0 = 0$ ha concavità rivolta verso il basso.

7. La serie di potenze

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^3}$$

   (a) converge su tutto $\mathbb{R}$;
   (b) ha raggio di convergenza 1 ;
   (c) converge solo sull'intervallo $(0, 1)$;
   (d) converge su tutto l'intervallo $[-1, 1]$;
   (e) converge uniformemente su ogni intervallo chiuso contenuto nell'intervallo $(-1, 1)$;
   (f) definisce una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ sull'intervallo di convergenza.

8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica che sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ è definita da $f(x) = x \sin \frac{x}{2}$ e sia

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

la sua serie di Fourier.

(a) La serie $F(x)$ converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(b) Si ha $F(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(c) $F(\pi) = 0$.

(d) $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(e) $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

(f) $a_0 = 8/\pi$.

9. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la funzione definita da $f(z) = \mathrm{e}^z$.

(a) La funzione f è iniettiva.

(b) La funzione f è suriettiva.

(c) La funzione f è periodica.

(d) La funzione f è intera.

(e) L'elemento $z_0 = -1$ possiede infinite controimmagini mediante f.

(f) L'elemento $z_0 = \mathrm{i}$ non possiede controimmagini mediante f.

10. Calcolare l'integrale complesso

$$I = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma z^5 \, \mathrm{e}^{-2/z^2} \, \mathrm{d}z \, .$$

dove γ è la curva di equazione $|z| = 1$, orientata positivamente.

1. V V V V F F

2. V V V V F F

   La trasformazione F è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ e

$$J = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}, \qquad \det J = 4(x^2 - y^2)\,.$$

   Pertanto F è localmente invertibile solo nei punti (x, y) con $x^2 - y^2 \neq 0$.

   Le controimmagini del punto $O = (0, 0)$ sono determinate dal sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

   che ha solo la soluzione $(x, y) = (0, 0)$.

   Le controimmagini del punto $P = (1, 1)$ sono determinate dal sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

   che ammette le due soluzioni $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

   Più in generale, le controimmagini di un punto $X \equiv (x, y)$ sono determinate dal sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = x \\ 2ab = y\,. \end{cases}$$

   Sommando le due equazioni, si ha $(a+b)^2 = x+y$. Quindi, se il punto X possiede una controimmagine, allora deve essere $x+y \geq 0$. Questo significa che l'immagine di F è contenuta nel semipiano $x + y \geq 0$.

3. In coordinate cilindriche, la regione Ω è determinata dalle condizioni $0 \leq \rho \leq r$, $0 \leq \theta \leq \pi/4$ e $0 \leq z \leq h$. Quindi, si ha

$$I = \int_0^r \int_0^{\pi/4} \int_0^h \rho\cos\theta\,\rho\sin\theta\,t\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^r \rho^3\,\mathrm{d}\rho \int_0^{\pi/4} \sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^h t\,\mathrm{d}t = \frac{r^4 h^2}{32}\,.$$

4. F V V F V V

   Si ha

$$\begin{cases} x' = 2t\cos t - t^2\sin t \\ y' = 2t\sin t + t^2\cos t \\ z' = 2\,. \end{cases}$$

Quindi, essendo $z'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$, la curva γ è regolare. Inoltre, si ha

$$\|f'(t)\| = \sqrt{4t^2 + t^4 + 4} = 2 + t^2$$

e quindi

$$L = \int_\gamma \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (2 + t^2) \, \mathrm{d}t = \left[2t + \frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = 4\pi + \frac{8}{3}\pi^3 .$$

5. Il triangolo ABC è la superficie Σ che giace sul piano $\pi \, : \, x + y + z = 1$ e che ha equazioni parametriche

$$\Sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u - v \end{cases} \qquad (u, v) \in \Omega$$

dove

$$\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \, : \, u, v \geq 0 \, , \, v \leq 1 - u\} .$$

Essendo Σ una superficie piana, il suo vettore normale è costante e lo si ottiene immediatamente dall'equazione del piano π. Si ha il vettore $\mathbf{N} = (1, 1, 1)$, coerente con l'orientazione del bordo assegnata. Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} \Phi_\Sigma(\mathbf{F}) &= \iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iint_\Omega \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (x + \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y + y - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^z + z - \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^z) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (x + y + z) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \int_0^1 \int_0^{1-u} \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u = \int_0^1 (1 - u) \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Equivalentemente, si ha

$$\begin{aligned} \Phi_\Sigma(\mathbf{F}) &= \iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iint_\Omega \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \iint_\Omega (x + \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y + y - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^z + z - \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \iint_\Omega (x + y + z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_\Omega \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \mathcal{A}(\Omega) = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

6. V V V V V F

7. F V F V V V

Poiché

$$\left| \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)^3} \frac{n^3}{(-1)^{n-1} x^n} \right| = \frac{n^3}{(n+1)^3} |x| \to |x| \qquad \text{per } n \to +\infty ,$$

la serie di potenze data ha raggio di convergenza $r = 1$ e quindi converge su tutto l'intervallo $(-1, 1)$. Tuttavia, la series converge anche agli estremi. In $x = 1$ per il criterio di Leibniz. In $x = -1$ perchè si riduce ad una serie armonica generalizzata con esponente $3 > 1$.

8. V V F F V V

   Si ha $f(\pi) = f(-\pi) = \pi$. Quindi, essendo la funzione f regolare su $[-\pi, \pi]$ e continua su $\mathbb{R}$, si ha che la serie $F(x)$ converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ a $f(x)$, e quindi $F(x) = f(x)$ su tutto $\mathbb{R}$. In particolare, $F(\pi) = f(\pi) = \pi$. Inoltre, essendo f pari, si ha che $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Infine, si ha

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[-2x\cos\frac{x}{2}\right]_0^\pi + \frac{4}{\pi}\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\left[2\sin\frac{x}{2}\right]_0^\pi = \frac{8}{\pi}\,.$$

9. F F V V V F

   (a) Si ha $\mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$.

   (b) Si ha $\mathrm{e}^z \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

   (c) Si ha $\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z$, per ogni $z \in \mathbb{C}$ e per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

   (d) La funzione f è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$, quindi è intera.

   (e) Si ha $\mathrm{e}^z = -1$ sse $z = \log(-1) = \ln|-1| + \mathrm{i}(\pi + 2k\pi) = (2k+1)\pi\mathrm{i}$, con $k \in \mathbb{Z}$.

   (f) Si ha $\mathrm{e}^z = \mathrm{i}$ sse $z = \log\mathrm{i} = \ln|\mathrm{i}| + \mathrm{i}(\pi/2 + 2k\pi) = (4k+1)\frac{\pi}{2}\mathrm{i}$, con $k \in \mathbb{Z}$.

10. la funzione integranda è olomorfa su totto $\mathbb{C}$, tranne che in $z_0 = 0$ dove presenta una singolarità essenziale. Infatti, si ha

$$z^5\,\mathrm{e}^{-2/z^2} = z^5\Big(1 - \frac{2}{z^2} + \frac{4}{2z^4} - \frac{8}{6z^6} + \cdots\Big) = z^5 - 2z^3 + 2z - \frac{4}{3}\,\frac{1}{z} + \cdots$$

   Quindi

$$\operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{4}{3}\,,$$

   e, per il teorema dei residui,

$$I = \operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{4}{3}\,.$$