POLITECNICO DI MILANO
INGEGNERIA INDUSTRIALE E DELL'INFORMAZIONE

ANALISI MATEMATICA II *Quarto appello – 10 Settembre 2020*

Istruzioni. *Segnare le risposte corrette, tenendo conto che ogni domanda può avere più risposte corrette (eventualmente nessuna). Non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici, strumenti di calcolo e telefonini.*
Punteggi. *Ogni domanda vale 3 punti.*
Tempo. *1 ora.*

1. Il limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$$
   (a) vale 0
   (b) vale 1
   (c) vale 2/3
   (d) vale $+\infty$
   (e) vale $-\infty$
   (f) non esiste

2. La funzione definita da $f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2x^2 - 2y^2$.
   (a) possiede esattamente tre punti stazionari
   (b) ammette $P \equiv (0,1)$ come punto di massimo
   (c) ammette $Q \equiv (0,-1)$ come punto di minimo
   (d) ammette $R \equiv (1,1)$ come punto di sella
   (e) ammette $S \equiv (1,0)$ come punto di massimo
   (f) ammette $O \equiv (0,0)$ come punto di sella

3. Calcolare la massa totale M della regione
$$\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 1 \}$$
   rispetto alla densità di massa $\delta(x,y,z) = (x^2+y^2)z^2$.
   (a) $M = 1$
   (b) $M = \pi$
   (c) $M = \frac{\pi}{3}$
   (d) $M = \frac{\pi}{6}$

4. Calcolare il lavoro L del campo vettoriale

$$\mathbf{F} = (-x^2y + xy^2 + y, x^2y + xy^2 + x)$$

lungo il bordo γ (orientato positivamente) della regione

$$\Omega = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2,\ x \leq 0,\ y \geq 0 \,\}.$$

(a) $L = 0$
(b) $L = \frac{15}{8}\,\pi$
(c) $L = -\frac{3}{4}\,\pi$
(d) $L = \frac{3}{8}\,\pi$

5. Calcolare la curvatura di

$$\gamma : \begin{cases} x = \mathrm{e}^t + \cos t \\ y = \mathrm{e}^t + \sin t \\ z = \mathrm{e}^t + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

nel punto corrispondente a $t = 0$.

(a) $\kappa(0) = 1$
(b) $\kappa(0) = \frac{\sqrt{3}}{27}$
(c) $\kappa(0) = \frac{\sqrt{2}}{27}$
(d) $\kappa(0) = -\frac{\sqrt{5}}{9}$

6. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F} = (x + y, x + z, y + z)$.

(a) $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (0, 0, 0)$
(b) $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$
(c) $\mathbf{F}$ è conservativo su $\mathbb{R}^3$
(d) $\mathbf{F}$ ammette un potenziale su tutto $\mathbb{R}^3$
(e) il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la circonferenza di centro $(1, 2, 3)$ e raggio 8 è 0
(f) il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1 è 0

7. L'equazione differenziale

$$y' = \mathrm{e}^{x^2-1}(\mathrm{e}^{y^2-1} - 1)$$

(a) è a variabili separabili
(b) è del secondo ordine
(c) non possiede soluzioni singolari
(d) possiede esattamente due soluzioni singolari
(e) ammette un'unica soluzione tale che $y(\pi^2) = 3\sqrt{2}$
(f) non ammette soluzioni tali che $y(0) = 0$

8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica che sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ è definita da

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$$

e sia

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

la sua serie di Fourier.

(a) La funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}$

(b) La funzione f è pari

(c) $a_0 = \frac{\mathrm{e}^{\pi^2}}{\pi}$

(d) Per l'identità di Parseval, si ha

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)^2 \mathrm{d}x$$

(e) Per l'identità di Parseval, si ha

$$\sum_{n \geq 1} b_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)^2 \mathrm{d}x$$

(f) Per l'identità di Parseval, si ha

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \mathrm{d}x$$

9. La serie di potenze

$$S(z) = \sum_{n \geq 2} \frac{n-1}{n!} \, z^n$$

(a) ha disco di convergenza $|z| < 1$

(b) converge su tutto $\mathbb{C}$ alla funzione $S(z) = (z-1)\,\mathrm{e}^z$

(c) converge per $z = 1$ a 0

(d) converge per $z = 1$ a 1

(e) definisce una funzione derivabile su tutto $\mathbb{C}$ e $S'(z) = z\,\mathrm{e}^z$

(f) definisce una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$

10. Si consideri la funzione complessa

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}\, z/2}}{z(z^4 - 1)}$$

e l'integrale

$$I = \int_{\gamma} f(z) \, \mathrm{d}z$$

dove γ è la circonferenza $|z - 3/2| = 1$, orientata in senso orario.

(a) La funzione f possiede esattamente tre poli semplici

(b) La funzione f possiede esattamente cinque poli semplici

(c) La funzione f possiede una singolarità essenziale

(d) $I = 0$

(e) $I = \pi/2$

(f) $I = -\pi/2$

Risposte

1. Il limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$$

   (a) vale 0

   (b) vale 1

   (c) vale $2/3$

   (d) vale $+\infty$

   (e) vale $-\infty$

   ✗) non esiste

   Indichiamo con $F(x,y)$ la funzione di cui dobbiamo calcolare il limite e consideriamo la retta di equazione $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$. Allora
$$F(x,mx) = \frac{x^2+m^2x^2}{x^2+mx^2+m^2x^2} = \frac{1+m^2}{1+m+m^2}$$
   e quindi
$$L = \lim_{x\to 0} F(x,mx) = \frac{1+m^2}{1+m+m^2}\,.$$
   Poiché il valore di L dipende dal valore del parametro m, il limite L non può esistere.

2. La funzione definita da $f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2x^2 - 2y^2$.

   ✗) possiede esattamente tre punti stazionari

   (b) ammette $P \equiv (0,1)$ come punto di massimo

   ✗) ammette $Q \equiv (0,-1)$ come punto di minimo

   (d) ammette $R \equiv (1,1)$ come punto di sella

   (e) ammette $S \equiv (1,0)$ come punto di massimo

   ✗) ammette $O \equiv (0,0)$ come punto di sella

   La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. I suoi punti stazionari sono le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} 4x^3+4xy^2+4x = 0 \\ 4x^2y+4y^3-4y = 0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x(x^2+y^2+1) = 0 \\ y(x^2+y^2-1) = 0\,. \end{cases}$$
   Dalla prima equazione, essendo $x^2+y^2+1 \neq 0$ per ogni $x,y \in \mathbb{R}$, si ha necessariamente $x = 0$. Sostituendo $x = 0$ nella seconda equazione, si ha $y(y^2-1) = 0$, ossia $y = 0, \pm 1$. Abbiamo così tre punti stazionari: $O \equiv (0,0)$, $P_{1,2} \equiv (0,\pm 1)$.

La matrice hessiana di f è

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 + 4y^2 + 4 & 8xy \\ 8xy & 4x^2 + 12y^2 - 4 \end{bmatrix}.$$

Poiché la matrice

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

è indefinita (avendo due autovalori non nulli di segno opposto), il punto O è un punto di sella.

Poiché la matrice

$$H(0,\pm 1) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

è definita positiva (avendo due autovalori positivi), i punti $P_{1,2}$ sono punti di minimo.

3. Calcolare la massa totale M della regione

$$\Omega = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 1 \,\}$$

rispetto alla densità di massa $\delta(x,y,z) = (x^2 + y^2) z^2$.

(a) $M = 1$

(b) $M = \pi$

(c) $M = \frac{\pi}{3}$

(d) $M = \frac{\pi}{6}$

Si ha

$$M = \iiint_\Omega \delta \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iiint_\Omega (x^2 + y^2) z^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \,.$$

Utilizzando le coordinate cilindriche, la regione Ω è determinata dalle condizioni $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le t \le 1$. Quindi, si ha

$$M = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 t^2 \, \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}t = \int_0^1 \rho^3 \, \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{4} \, 2\pi \, \frac{1}{3} = \frac{\pi}{6} \,.$$

4. Calcolare il lavoro L del campo vettoriale

$$\mathbf{F} = (-x^2 y + x y^2 + y, x^2 y + x y^2 + x)$$

lungo il bordo γ (orientato positivamente) della regione

$$\Omega = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \le x^2 + y^2 \le 2,\ x \le 0,\ y \ge 0 \,\}.$$

(a) $L = 0$

(b) $L = \frac{15}{8} \pi$

(c) $L = -\frac{3}{4} \pi$

✗) $L = \frac{3}{8}\,\pi$

Poiché il campo $\mathbf{F}$ è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ e Ω è una regione xy-semplice (essendo un quarto di corona circolare, nel secondo quadrante), possiamo utilizzare il teorema di Gauss-Green:

$$\begin{aligned} L_\gamma(\mathbf{F}) &= \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_\Omega (2xy + y^2 + 1 + x^2 - 2xy - 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_\Omega (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \end{aligned}$$

Passando alle coordinate polari, si ha

$$L_\gamma(\mathbf{F}) = \int_1^{\sqrt{2}} \int_{\pi/2}^{\pi} \rho^2\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_1^{\sqrt{2}} \rho^3\,\mathrm{d}\rho \int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{4-1}{4}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{8}\,\pi\,.$$

5. Calcolare la curvatura di

$$\gamma : \begin{cases} x = \mathrm{e}^t + \cos t \\ y = \mathrm{e}^t + \sin t \\ z = \mathrm{e}^t + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

nel punto corrispondente a $t = 0$.

(a) $\kappa(0) = 1$

(b) $\kappa(0) = \frac{\sqrt{3}}{27}$

✗) $\kappa(0) = \frac{\sqrt{2}}{27}$

(d) $\kappa(0) = -\frac{\sqrt{5}}{9}$

Poiché

$$\begin{cases} x' = \mathrm{e}^t - \sin t \\ y' = \mathrm{e}^t + \cos t \\ z' = \mathrm{e}^t + 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x'' = \mathrm{e}^t - \cos t \\ y'' = \mathrm{e}^t - \sin t \\ z'' = \mathrm{e}^t\,, \end{cases}$$

si ha $f'(0) = (1,2,2)$, $f''(0) = (0,1,1)$, $f'(0) \wedge f''(0) = (0,-1,1)$, $\|f'(0)\| = 3$, $\|f'(0) \wedge f''(0)\| = \sqrt{2}$ e quindi

$$\kappa(0) = \frac{\|f'(0) \wedge f''(0)\|}{\|f'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{27}\,.$$

6. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F} = (x+y, x+z, y+z)$.

✗) $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (0,0,0)$

(b) $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$

✗) $\mathbf{F}$ è conservativo su $\mathbb{R}^3$

(✗) $\mathbf{F}$ ammette un potenziale su tutto $\mathbb{R}^3$

(✗) il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la circonferenza di centro $(1, 2, 3)$ e raggio 8 è 0

(f) il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1 è 0

Poiché $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (0, 0, 0)$ su tutto $\mathbb{R}^3$, il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale. Inoltre, essendo $\mathbb{R}^3$ semplicemente connesso, il campo $\mathbf{F}$ è conservativo. Di conseguenza, il lavoro di $\mathbf{F}$ lngo una qualunque curva chiusa è nullo.

Infine, si ha $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2$. Quindi, indicando con S la sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1 è 0 e con Ω la regione interna ad S, si ha (per il teorema della divergenza)

$$\Phi_S(\mathbf{F}) = \iiint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = 2 \iiint_\Omega \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = 2V(\Omega) = \frac{8}{3}\pi\,.$$

7. L'equazione differenziale

$$y' = \mathrm{e}^{x^2-1}(\mathrm{e}^{y^2-1} - 1)$$

(✗) è a variabili separabili

(b) è del secondo ordine

(c) non possiede soluzioni singolari

(✗) possiede esattamente due soluzioni singolari

(✗) ammette un'unica soluzione tale che $y(\pi^2) = 3\sqrt{2}$

(f) non ammette soluzioni tali che $y(0) = 0$

8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica che sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ è definita da

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$$

e sia

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

la sua serie di Fourier.

(a) La funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}$

(b) La funzione f è pari

(c) $a_0 = \frac{\mathrm{e}^{\pi^2}}{\pi}$

(d) Per l'identità di Parseval, si ha

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)^2 \mathrm{d}x$$

(✗) Per l'identità di Parseval, si ha

$$\sum_{n\geq 1} b_n^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)^2 \mathrm{d}x$$

(✗) Per l'identità di Parseval, si ha

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \mathrm{d}x$$

La funzione f è dispari. Quindi $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

9. La serie di potenze

$$S(z) = \sum_{n\geq 2} \frac{n-1}{n!}\, z^n$$

   (a) ha disco di convergenza $|z| < 1$

   (b) converge su tutto $\mathbb{C}$ alla funzione $S(z) = (z-1)\,\mathrm{e}^z$

   (c) converge per $z = 1$ a 0

   (✗) converge per $z = 1$ a 1

   (✗) definisce una funzione derivabile su tutto $\mathbb{C}$ e $S'(z) = z\,\mathrm{e}^z$

   (✗) definisce una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$

Posto $a_n = \frac{n-1}{n!}\, z^n$, si ha

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n\, z^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{(n-1)z^n}\right| = \frac{n}{(n+1)(n-1)}|z| \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty\,.$$

Pertanto, la serie $S(z)$ converge per ogni $z \in \mathbb{C}$. Più precisamente, si ha

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{n\geq 2} \frac{n-1}{n!}\, z^n = \sum_{n\geq 2} \frac{n}{n!}\, z^n - \sum_{n\geq 2} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n\geq 2} \frac{z^n}{(n-1)!} - \sum_{n\geq 2} \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{z^{n+1}}{n!} - \sum_{n\geq 2} \frac{z^n}{n!} = z\left(\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} - 1\right) - \left(\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} - 1 - z\right) \\ &= z(\mathrm{e}^z - 1) - (\mathrm{e}^z - 1 - z) = 1 + (z-1)\mathrm{e}^z\,. \end{aligned}$$

Abbiamo potuto spezzare la prima serie come somma di due serie ppoiché le due serie ottenute sono essenzialmente serie esponenziali e quindi sono sempre convergenti. Infine, la serie $S(z)$ definisce una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ e

$$S'(z) = z\,\mathrm{e}^z\,.$$

10. Si consideri la funzione complessa

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}\, z/2}}{z(z^4 - 1)}$$

e l'integrale

$$I = \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z$$

dove γ è la circonferenza $|z - 3/2| = 1$, orientata in senso orario.

(a) La funzione f possiede esattamente tre poli semplici

(b) La funzione f possiede esattamente cinque poli semplici

(c) La funzione f possiede una singolarità essenziale

(d) $I = 0$

(e) $I = \pi/2$

(f) $I = -\pi/2$

La funzione f è olomorfa su totto $\mathbb{C}$, tranne che nei punti $0, \pm 1, \pm \mathrm{i}$, dove presenta dei poli semplici. Di questi 5 poli, solo 1 si trova all'interno di γ e

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z \to 1} \frac{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}\, z/2}}{z(z^2+1)(z+1)} = \frac{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/2}}{4} = \frac{\mathrm{i}}{4}\,.$$

Pertanto, essendo la curva γ orientata negativamente, si ha (per il teorema dei residui)

$$I = -2\pi \mathrm{i} \operatorname{Res}(f, 1) = \frac{\pi}{2}\,.$$