1. Determinare la lunghezza della curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t\cos 2t \\ y = t\sin 2t \\ z = \frac{2}{3}t^3 \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

2. Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F} = (xy^2 + y^4, 4xy^3 + 2x^2y)$ lungo la curva γ (orientata positivamente), data dal bordo della regione

$$\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\,,\ 0 \leq y \leq 1\,,\ y \geq x^2\big\}.$$

3. Siano $r, h \in \mathbb{R}\,,\ r, h > 0\,.$ Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = (xy, yz, xz)$ attraverso la superficie Σ (orientata positivamente), data dal bordo della regione

$$\Omega = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq r^2,\ 0 \leq z \leq h\big\}.$$

4. Si consideri la superficie

$$\Sigma : \begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = uv \end{cases} \qquad (u,v) \in \Omega$$

dove $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, u^2 + v^2 \leq 1\}\,.$

(a) La norma del vettore normale $\mathbf{N}$ è $\sqrt{u^2 + v^2 + 2}\,.$
(b) Σ è una superficie regolare.
(c) L'area di Σ è $(\sqrt{6} - \sqrt{2})\pi\,.$
(d) L'area di Σ è $(\sqrt{6} - 2)\pi\,.$
(e) $\displaystyle\int_\Sigma \sqrt{x^2 + y^2 + 4}\,\mathrm{d}\sigma = 5\pi\,.$
(f) $\displaystyle\int_\Sigma \sqrt{x^2 + y^2 + 4}\,\mathrm{d}\sigma = 4\pi\,.$

5. Scrivere la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - \mathrm{e}^x\, y(x) = \mathrm{e}^x \\ y(0) = -1\,. \end{cases}$$

6. Scrivere la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)}{1 + x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

indicando l'intervallo massimale su cui è definita.

7. Determinare l'anello di convergenza della serie di Laurent

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|n|\, z^n}{3^n + 4^n}.$$

8. Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\pi/z}}{z(1+z^2)}\,.$$

(a) $z_0 = 0$ è un polo semplice per f.

(b) $z_0 = 0$ è un polo di ordine 3 per f.

(c) $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale per f.

(d) $\mathrm{Res}(f, 0) = 0$.

(e) $\mathrm{Res}(f, 0) = 1$.

(f) $\mathrm{Res}(f, 0) = -1$.

(g) $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}$, dove $\gamma : |z| = 1/2$, orientata positivamente.

(h) $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, dove $\gamma : |z - 5 - 7\mathrm{i}| = 1$, orientata positivamente.

Soluzioni

1. Si ha
$$\begin{cases} x' = \cos 2t - 2t\sin 2t \\ y' = \sin 2t + 2t\cos 2t \\ z' = 2t^2 \end{cases}$$
e quindi
$$\|f'(t)\|^2 = (\cos 2t - 2t\sin 2t)^2 + (\sin 2t + 2t\cos 2t)^2 + (2t^2)^2 = 1 + 4t^2 + 4t^4 = (1+2t^2)^2$$
ossia $\|f'(t)\| = 1+2t^2$. Poiché $\|f'(t)\| \neq 0$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$, la curva γ è regolare. Quindi, essendo di classe $\mathcal{C}^1$, la lunghezza di γ è
$$L(\gamma) = \int_\gamma \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (1+2t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t + \frac{2}{3}\,t^3\right]_0^{2\pi} = 2\pi + \frac{16}{3}\,\pi^3 .$$

2. Poiché Ω è una regione semplice ed $\mathbf{F}$ è un campo di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$, possiamo calcolare il lavoro richiesto usando il teorema di Gauss-Green:
$$\begin{aligned} L_\gamma(\mathbf{F}) &= \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega (4y^3 + 4xy - 2xy - 4y^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 2\iint_\Omega xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^1 x\left(\int_{x^2}^1 y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^1 \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x(1-x^4)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x - x^5)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{3} . \end{aligned}$$

3. Essendo una porzione del cilindro pieno che ha per asse l'asse z, la regione Ω è xyz-semplice. Il campo $\mathbf{F}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^3$. Quindi possiamo calcolare il flusso richiesto usando il teorema della divergenza:
$$\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_\Omega (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z .$$
Passando alle coordinate cilindriche, si ha
$$\begin{aligned} \Phi_\Sigma(\mathbf{F}) &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^h (\rho\cos\theta + \rho\sin\theta + t)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \left[(\rho\cos\theta + \rho\sin\theta)t + \frac{t^2}{2}\right]_0^h \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \left((\rho\cos\theta + \rho\sin\theta)h + \frac{h^2}{2}\right) \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^r \left[(\rho\sin\theta - \rho\cos\theta)h + \frac{h^2}{2}\,\theta\right]_0^{2\pi} \rho\,\mathrm{d}\rho \\ &= \pi h^2 \int_0^r \rho\,\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{\pi}{2}\,h^2 r^2 . \end{aligned}$$

4. Sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale, definita da $f(u,v) = (u+v, u-v, uv)$, che parametrizza la superficie Σ. Allora, si ha $F_u = (1,1,v)$ e $F_v = (1,-1,u)$. Pertanto
$$\mathbf{N} = F_u \wedge F_v = (1,1,v) \wedge (1,-1,u) = (u+v, -u+v, -2)$$
e
$$\|\mathbf{N}\| = \sqrt{(u+v)^2 + (-u+v)^2 + 4} = \sqrt{2u^2 + 2v^2 + 4} .$$

Poiché $\|\mathbf{N}\| \neq 0$ per ogni $(u,v) \in \Omega$, la superficie Σ è regolare. Inoltre

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_\Sigma \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \|\mathbf{N}\| \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sqrt{2}\int_\Omega \sqrt{u^2+v^2+2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Passando alle coordinate polari, si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\Sigma) &= \sqrt{2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{2}\,\pi\int_0^1 2\rho\sqrt{\rho^2+2}\,\mathrm{d}\rho \\ &= \sqrt{2}\,\pi\left[\frac{2}{3}(\rho^2+2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})\,\pi = \left(2\sqrt{6}-\frac{8}{3}\right)\pi\,.\end{aligned}$$

Infine, si ha

$$\begin{aligned} I &= \iint_\Sigma \sqrt{x^2+y^2+4}\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \iint_\Omega \sqrt{(u+v)^2+(u-v)^2+4}\,\|\mathbf{N}\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \iint_\Omega \sqrt{2u^2+2v^2+4}\cdot\sqrt{2u^2+2v^2+4}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= 2\iint_\Omega (u^2+v^2+2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.\end{aligned}$$

Passando alle coordinate polari, si ha

$$I = 2\int_0^1\int_0^{2\pi}(\rho^2+2)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = 4\pi\int_0^1(\rho^3+2\rho)\,\mathrm{d}\rho = 4\pi\left[\frac{\rho^4}{4}+\rho^2\right]_0^1 = 5\pi\,.$$

5. La soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \mathrm{e}^{\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\right] = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\left[\int \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x + c\right] = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}(-\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}+c)$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria di integrazione. Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -1$, si ha $c = 0$. La soluzione cercata, quindi, è $y(x) = -1$.

6. L'equazione data è un'equazione differenziale a variabili separabili. Vi è una sola soluzione singolare, data da $y(x) = 0$. Separando le variabili, si ha

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

ossia

$$\ln|y(x)| = \operatorname{artg} x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

ossia

$$|y(x)| = K\mathrm{e}^{\operatorname{artg} x} \qquad K = \mathrm{e}^c \in \mathbb{R}^+$$

ossia

$$y(x) = \pm K\mathrm{e}^{\operatorname{artg} x} \qquad K = \mathrm{e}^c \in \mathbb{R}^+\,.$$

In conclusione, la soluzione generale (inglobando la soluzione singolare) è data da

$$y(x) = \lambda\mathrm{e}^{\operatorname{artg} x} \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$, si ha $c = 0$. Quindi, la soluzione cercata è

$$y(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{artg} x}\,.$$

Tale soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.

7. Innanzitutto, si ha

$$S=\sum_{n\geq 1}\frac{n\,z^{-n}}{3^{-n}+4^{-n}}+\sum_{n\geq 0}\frac{n\,z^{n}}{3^{n}+4^{n}}=\sum_{n\geq 1}\frac{n12^{n}}{3^{n}+4^{n}}\frac{1}{z^{n}}+\sum_{n\geq 0}\frac{n\,z^{n}}{3^{n}+4^{n}}\,.$$

Posto $a_n=\frac{n12^n}{3^n+4^n}\frac{1}{z^n}$, si ha

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{(n+1)\,12^{n+1}}{3^{n+1}+4^{n+1}}\frac{1}{z^{n+1}}\cdot\frac{3^n+4^n}{n12^n}\,z^n\right|=\frac{n+1}{n}\frac{3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}\frac{12}{|z|}=\frac{n+1}{n}\frac{(3/4)^n+1}{3(3/4)^n+4}\frac{12}{|z|}\,.$$

Poiché $(3/4)^n\to 0$ per $n\to+\infty$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{4}\frac{12}{|z|}=\frac{3}{|z|}\,.$$

Quindi, la prima serie converge per $\frac{3}{|z|}<1$, ossia per $|z|>3$.

Posto $b_n=\frac{n\,z^n}{3^n+4^n}$, si ha

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\left|\frac{(n+1)\,z^{n+1}}{3^{n+1}+4^{n+1}}\cdot\frac{3^n+4^n}{n\,z^n}\right|=\frac{n+1}{n}\frac{3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}\,|z|=\frac{n+1}{n}\frac{(3/4)^n+1}{3(3/4)^n+4}\,|z|$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\frac{1}{4}\,|z|\,.$$

Così, la seconda serie converge per $|z|<4$.

In conclusione, l'anello di convergenza della serie di Laurent data è $3<|z|<4$.

8. Iniziamo con lo scrivere lo sviluppo di Laurent di f in $z_0=0$. Usando gli sviluppi di MacLaurin delle funzioni elementari, si ha

$$f(z)=\frac{1}{z}\,\frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{e}^{\pi/z}=\frac{1}{z}\,\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^{2n}\sum_{m\geq 0}\frac{\pi^m}{m!z^m}=\sum_{m,n\geq 0}(-1)^n\frac{\pi^m}{m!}\,\frac{1}{z^{m-2n+1}}\,.$$

Poiché ci sono infinite potenze negative, si ha che $z_0=0$ è una singolarità essenziale. Inoltre, poiché il residuo di f in 0 è il coefficiente di $1/z$ nello sviluppo precedente, si ha (per $m=2n$)

$$\operatorname{Res}(f,0)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}=\cos\pi=-1\,.$$

Le singolarità di f sono $z_0=0$ e $z_{1,2}=\pm\mathrm{i}$. Allora, la curva $\gamma:|z|=1/2$ circonda solo z_0 e quindi, per il teorema dei residui, si ha

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f,0)=-2\pi\mathrm{i}\,.$$

Invece, la curva $\gamma:|z-5-7\mathrm{i}|=1$ non circonda alcuna delle singolarità di f . Quindi, per il teorema integrale di Cauchy, si ha

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=0\,.$$