Analisi Matematica II — *Primo Appello – 19 Febbraio 2021*

1. Il limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+3xy+y^2}$$
   (a) non esiste
   (b) vale 0
   (c) vale 1
   (d) vale 1/3
   (e) vale $+\infty$.

2. Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) = x^4+y^4-2x^2-2y^2-1.$$
   (a) La funzione f assume valori positivi e valori negativi.
   (b) Il grafico della funzione f è simmetrico rispetto all'asse z.
   (c) La funzione f ammette 8 punti critici.
   (d) L'origine è un massimo assoluto.
   (e) I punti $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ sono punti di minimo assoluto.
   (f) La funzione f ammette quattro punti di sella.
   (g) Nel punto $\mathbf{x}_0=(1/2,1/2)$ la funzione f ha massima crescita lungo la direzione e il verso individuati dal vettore $\mathbf{v}=(1,1)$.
   (h) Il piano tangente al grafico della funzione f in corrispondenza del punto $\mathbf{x}_0=(1/2,1/2)$ ha equazione $12x+12y+8z+3=0$.

3. Determinare la lunghezza della curva
$$\gamma : \begin{cases} x = t\cos(9t^2) \\ y = t\sin(9t^2) \\ z = 3t^2 \end{cases} \qquad t\in[0,\pi].$$

4. Calcolare l'integrale
$$I = \iiint_\Omega \frac{\operatorname{artg}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
   dove
$$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, \frac{1}{3}\le x^2+y^2+z^2\le 3\right\}.$$

5. Calcolare il lavoro del campo vettoriale
$$\mathbf{F} = (x\mathrm{e}^{x^2+y^2}-xy^2, y\mathrm{e}^{x^2+y^2}+x^2y)$$
   lungo la curva γ (orientata positivamente), data dal bordo della regione
$$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1,\ x^2+y^2-2x\ge 0\}.$$

6. Scrivere la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1+y(x)^2}{1+x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

indicando l'intervallo massimale su cui è definita.

7. Si consideri l'equazione differenziale

$$3y''(x) - 2y'(x) - y(x) = (x+1)\mathrm{e}^x + (x^2+1)\mathrm{e}^{3x}.$$

(a) L'equazione data ammette esattamente una soluzione.

(b) L'equazione data ammette ∞^2 soluzioni.

(c) L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y_{om}(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{3x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(d) L'equazione data ammette una soluzione particolare del tipo

$$\widetilde{y}(x) = (A_1x + B_1)\mathrm{e}^x + (A_2x^2 + B_2x + C_2)\mathrm{e}^{3x}.$$

(e) L'equazione data ammette una soluzione particolare del tipo

$$\widetilde{y}(x) = (A_1x^2 + B_1x + C_1)\mathrm{e}^x + (A_2x^2 + B_2x + C_2)\mathrm{e}^{3x}.$$

(f) L'equazione data ammette una soluzione particolare del tipo

$$\widetilde{y}(x) = (A_1x + B_1)\mathrm{e}^x + (A_2x^3 + B_2x^2 + C_2x + D_2)\mathrm{e}^{3x}.$$

(g) Se $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$, allora la soluzione ammette un punto di massimo in $x_0 = 0$.

(h) Se $y(0) = -3$ e $y'(0) = 0$, allora la soluzione ammette un punto di minimo in $x_0 = 0$.

8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \mathrm{e}^{-2x^2}$. Allora, lo sviluppo in serie di Taylor centrato in $x_0 = 0$ è

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n}}{n!}$, per $|x| < 1$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n x^{2n}}{n!}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n x^{2n}}{(n!)^2}$, per $|x| < 1$.

9. Calcolare il residuo della funzione

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{1/z^2}}{z(1+z^2)}$$

nel punto $z_0 = 0$.

Soluzioni

1. Consideriamo la funzione
$$f(x,y) = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+3xy+y^2}\,.$$
Allora, posto $y=0$, si ha
$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 0\,.$$
Analogamente, posto $y=x$, si ha
$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{5x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{5} = \frac{3}{5}\,.$$
Poiché i due risultati ottenuti sono diversi, il limite dato non esiste.

2. La funzione f assume valori positivi e valori negativi: $f(0,0)=1>0$ e $f(1,0)=-2<0$. Inoltre, il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse z: $f(-x,-y)=f(x,y)$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

La funzione f è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Quindi, i suoi punti critici sono le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} 4x^3-4x=0 \\ 4y^3-4y=0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x(x^2-1)=0 \\ y(y^2-1)=0\,. \end{cases}$$
Abbiamo così 9 punti critici, dati da $O\equiv(0,0)$, $A_{1,2}\equiv(0,\pm1)$, $A_{3,4}\equiv(\pm1,0)$, $B_{1,2}\equiv(1,\pm1)$, $B_{3,4}\equiv(-1,\pm1)$.

La matrice Hessiana di f è
$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2-4 & 0 \\ 0 & 12y^2-4 \end{bmatrix}.$$
Poiché
$$H(0,0) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},$$
si hanno due autovalori negativi, ossia una forma quadratica definita negativa. Quindi l'origine è un punto di massimo.

Poiché
$$H(0,\pm1) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad H(\pm1,0) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},$$
si ha un autovalore positivo e un autovalore negativo, ossia una forma quadratica indefinita. Quindi i punti $A_{1,2}$ e $A_{3,4}$ sono punti di sella.

Poiché
$$H(\pm1,\pm1) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix},$$
si hanno due autovalori positivi, ossia una forma quadratica definita positiva. Quindi i punti $B_{1,2}$ e $B_{3,4}$ sono punti di minimo. Il valore minimo che la funzione assume in questi punti è $f(\pm1,\pm1)=2-4-1=-3$. Poiché per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$
$$f(x,y) = x^4-2x^2+1+y^4-2y^2+1-3 = (x^2-1)^2+(y^2-1)^2-3 \ge -3\,,$$
i punti $B_{1,2}$ e $B_{3,4}$ sono punti di minimo assoluto.

Dal conto precedente, si ha $\nabla f(x,y)=(4x^3-4x,4y^3-4y)$. Nel punto $\mathbf{x}_0=(1/2,1/2)$ la funzione f ha massima crescita lungo la direzione e il verso individuati dal vettore $\nabla f(1/2,1/2)=(-3/2,-3/2)$, che ha uguale direzione ma verso opposto al vettore $\mathbf{v}=(1,1)$.

Infine, il piano tangente al grafico della funzione f in corrispondenza del punto $\mathbf{x}_0 = (1/2, 1/2)$ ha equazione

$$z = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle$$

ossia

$$z = -\frac{7}{8} - \frac{3}{2}\Big(x - \frac{1}{2}\Big) - \frac{3}{2}\Big(y - \frac{1}{2}\Big)$$

ossia $12x + 12y + 8z + 3 = 0$.

3. Si ha

$$\begin{cases} x' = \cos(9t^2) - 18t^2 \sin(9t^2) \\ y' = \sin(9t^2) + 18t^2 \cos(9t^2) \\ z' = 6t \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \|f'(t)\|^2 &= (\cos(9t^2) - 18t^2 \sin(9t^2))^2 + (\sin(9t^2) + 18t^2 \cos(9t^2))^2 + (6t)^2 \\ &= 1 + 36t^2 + 18^2 t^4 = (1 + 18t^2)^2 \end{aligned}$$

ossia $\|f'(t)\| = 1 + 18t^2$. Poiché $\|f'(t)\| \neq 0$ per ogni $t \in [0, \pi]$, la curva γ è regolare. Quindi, essendo di classe $\mathcal{C}^1$, la lunghezza di γ è

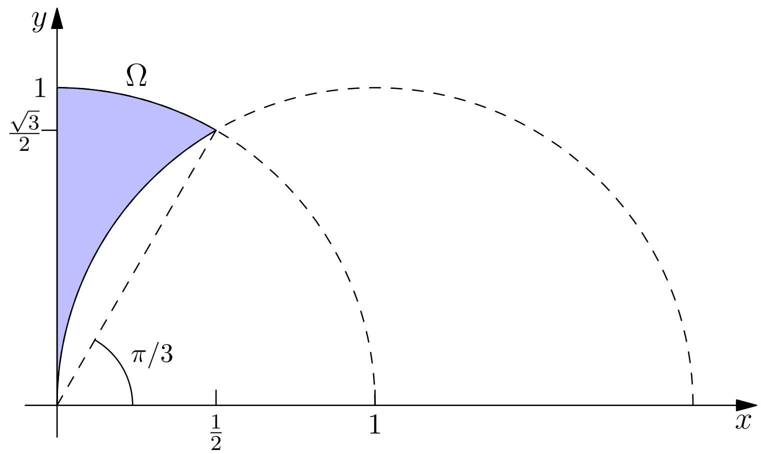
$$L(\gamma) = \int_\gamma \mathrm{d}s = \int_0^\pi \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_0^\pi (1 + 18t^2) \, \mathrm{d}t = \big[t + 6\,t^3\big]_0^\pi = \pi + 6\,\pi^3 .$$

4. La regione Ω è la corona sferica di centro l'origine e raggi $1/\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$. In coordinate sferiche, Ω è determinata dalle condizioni $1/\sqrt{3} \leq \rho \leq \sqrt{3}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Quindi, passando alle coordinate sferiche, l'integrale diventa

$$\begin{aligned} I &= \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{artg} \rho}{\rho^2} \, \rho^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \operatorname{artg} \rho \, \mathrm{d}\rho \int_0^\pi \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \left[\rho \operatorname{artg} \rho - \frac{1}{2} \ln(1 + \rho^2)\right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} [-\cos\varphi]_0^\pi \\ &= 4\pi \left(\sqrt{3} \operatorname{artg} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln(1 + 3) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{artg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right)\right) \\ &= 4\pi \left(\sqrt{3}\,\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \ln 4 - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}\right) \\ &= 4\pi \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \ln 2 + \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3\right) \\ &= 4\pi \left(\frac{5\pi}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \ln 3\right) \\ &= \frac{10\pi^2}{3\sqrt{3}} - 2\pi \ln 3 . \end{aligned}$$

5. La regione Ω è y-semplice, poiché si ha

$$\Omega = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0, 1/2],\ \sqrt{2x - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\big\},$$



Inoltre, il campo $\mathbf{F}$ è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Possiamo quindi usare il teorema di Gauss-Green:

$$\begin{aligned}
L_\gamma(\mathbf{F}) &= \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega (2xy + 2xy\mathrm{e}^{x^2+y^2} - 2xy\mathrm{e}^{x^2+y^2} + 2xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= 4\iint_\Omega xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\int_0^{1/2} x\left(\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = 4\int_0^{1/2} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{1/2} x(1-x^2-2x+x^2)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{1/2}(x-2x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3\right]_0^{1/2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}\,.
\end{aligned}$$

Equivalentemente, in coordinate polari la regione Ω è descritta dalle condizioni $\pi/3 \le \theta \le \pi/2$ e $2\cos\theta \le \rho \le 1$. Quindi, passando alle coordinate polari, si ha

$$\begin{aligned}
L_\gamma(\mathbf{F}) &= 4\iint_\Omega xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_{2\cos\theta}^{1} \rho^2\sin\theta\cos\theta\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\
&= 4\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\left(\int_{2\cos\theta}^{1}\rho^3\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta = 4\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{2\cos\theta}^{1}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\pi/3}^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta(1-16\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{\pi/3}^{\pi/2}(\sin\theta\cos\theta - 16\sin\theta\cos^5\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \left[-\frac{1}{2}\cos^2\theta + \frac{8}{3}\cos^6\theta\right]_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{64} = \frac{1}{8} - \frac{1}{3\cdot 8} = \frac{1}{12}\,.
\end{aligned}$$

6. L'equazione differenziale è a variabili separabili e non ammette soluzioni singolari. Separando le variabili e integrando, si ha
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$
ossia
$$\operatorname{artg} y = \operatorname{artg} x + c \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$
Imponendo $y(0) = 0$, si ha $c = 0$. Quindi, la soluzione cercata è $y = x$. Tale soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.

7. Poiché l'equazione data è lineare a coefficienti costanti, l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea associata forma uno spazio vettoriale di dimensione 2. Poiché l'equazione caratteristica $3\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ ha come radici $\lambda = 1$ e $\lambda = -1/3$, l'integrale generale dell'equazione omogenea è
$$y_{om}(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-1/3x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pertanto, la soluzione generale dell'equazione completa è

$$y(x) = y_{om}(x) + \overline{y}(x) = c_1 \mathrm{e}^{x} + c_2 \mathrm{e}^{-1/3x} + \overline{y}(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

dove $\overline{y}(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione completa. Poiché la soluzione generale dell'equazione completa dipende da due parametri reali indipendenti, abbiamo ∞^2 soluzioni.

Inoltre, poiché 1 è una soluzione dell'equazione caratteristica mentre 3 non lo è, si ha (per il metodo di somiglianza e il principio di sovrapposizione) che esiste una soluzione particolare del tipo

$$\widetilde{y}(x) = (A_1 x^2 + B_1 x + C_1)\, \mathrm{e}^{x} + (A_2 x^2 + B_2 x + C_2)\, \mathrm{e}^{3x}.$$

Infine, fissate le condizioni iniziali $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y_1$, il corrispondente problema di Cauchy ammette sempre esattamente una soluzione (definita su tutto $\mathbb{R}$).

In particolare, se $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$, allora si ha $3y''(0) - 2y'(0) - y(0) = 1 + 1$, ossia $3y''(0) = 3$, ossia $y''(0) = 1$. Quindi, essendo $y'(0) = 0$ e $y''(0) > 0$, la soluzione ammette un punto di minimo in $x_0 = 0$.

Analogamente, se $y(0) = -3$ e $y'(0) = 0$, allora si ha $3y''(0) - 2y'(0) - y(0) = 2$, ossia $3y''(0) = -1$, ossia $y''(0) = -1/3$. Quindi, essendo $y'(0) = 0$ e $y''(0) < 0$, la soluzione ammette un punto di massimo in $x_0 = 0$.

8. Poiché l'esponenziale ammette lo sviluppo

$$\mathrm{e}^{x} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

si ha

$$\mathrm{e}^{-2x^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-2)^n x^{2n}}{n!} \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

9. Iniziamo a scrivere lo sviluppo di Laurent di f in $z_0 = 0$. Usando gli sviluppi di MacLaurin delle funzioni elementari, si ha

$$f(z) = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{e}^{1/z^2} = \frac{1}{z}\sum_{n \geq 0} (-1)^n z^{2n} \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m! z^{2m}} = \sum_{m,n \geq 0} \frac{(-1)^n}{m!}\,\frac{1}{z^{2(m-n)+1}}\,.$$

Poiché ci sono infinite potenze negative, si ha che $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale. Inoltre, poiché il residuo di f in 0 è il coefficiente di $1/z$ nello sviluppo precedente, si ha (per $m = n$)

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-1}\,.$$