Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II *Secondo Appello – 11 Giugno 2021*

1. Il valore della derivata direzionale della funzione

$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 + xyz^2$$

nel punto $\mathbf{x}_0 = (1,-1,1)$ lungo il versore $\mathbf{v} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

(a) vale 0
(b) vale 1/3
(c) vale -1/3
(d) vale 1
(e) vale -1
(f) non esiste.

2. Si considerino due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$, tali che

f possiede un punto di massimo in x_0, $f(x_0) = -1$, $f''(x_0) \neq 0$
g possiede un punto di massimo in y_0, $g(y_0) = 1$, $g''(y_0) \neq 0$.

Si consideri poi la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x,y) = f(x)g(y).$$

Allora, la funzione F

(a) non ammette $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ come punto critico
(b) ammette $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ come punto critico
(c) possiede in $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ un punto di minimo
(d) possiede in $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ un punto di massimo
(e) possiede in $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ un punto di sella
(f) ammette piano tangente, in corrispondenza del punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, di equazione $z = x+y$.

3. La massa totale della lamina piana

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x^2+y^2 \leq 1,\, x^2+y^2-x \geq 0\right\}$$

di densità lineare $\delta(x,y) = xy$, vale

(a) -1
(b) 0
(c) 1
(d) 1/2
(e) 1/12
(f) 1/24

4. Determinare la lunghezza della curva

$$\gamma : \begin{cases} x = 2t^2 \cos t \\ y = 2t^2 \sin t \\ z = 4t \end{cases} \qquad t \in [0,1].$$

5. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F} = (3y^2 z \cos x, 6yz \sin x, 3y^2 \sin x)$.

   (a) Il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale

   (b) Il campo $\mathbf{F}$ ha divergenza nulla

   (c) Il campo $\mathbf{F}$ è conservativo

   (d) Il campo $\mathbf{F}$ ammette funzione potenziale

   (e) $L_\gamma(\mathbf{F}) = 6\sqrt{2}\,\pi$, dove γ è la circonferenza (orientata positivamente) di centro $C \equiv (1,1,1)$ e raggio $r = 2\sqrt{2}$

   (f) $L_\gamma(\mathbf{F}) = \dfrac{\pi^3}{4}$ dove γ è il segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$, dove $P \equiv (0,0,0)$ e $Q \equiv \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right)$

6. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{x-y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad x_0, y_0 \in \mathbb{R}\,.$$

   (a) Il problema ammette sempre una e una sola soluzione (locale)

   (b) Il problema può ammettere più di una soluzione (locale)

   (c) Il problema può non ammettere soluzioni

   (d) Per $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, si ha solo la soluzione $y(x) = \log(\mathrm{e}^x + x)$

   (e) Per $x_0 = 0$ e $y_0 = 1$, si ha solo la soluzione $y(x) = \log(\mathrm{e}^x + x - 1)$

   (f) Per $x_0 = 0$ e $y_0 = \log 2$, si ha solo la soluzione $y(x) = \log(1 + x + \mathrm{e}^x)$

7. La serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 1}{4^n + 1}\, z^n$$

   (a) converge per $z < 4$

   (b) converge per $|z| < 1/2$

   (c) converge per $|z| < 2$

   (d) converge per $2 < z < 4$

   (e) converge per $2 < |z| < 4$

   (f) non converge mai.

8. La funzione

$$f(z) = \frac{3z\,\mathrm{e}^{z+1}}{z^3 + 1}$$

   (a) è intera

   (b) è olomorfa per $|z| < 1$

   (c) non ammette punti singolari

   (d) ammette tre poli semplici

   (e) ammette un polo di ordine 3

   (f) $\mathrm{Res}(f, -1) = 0$

   (g) $\mathrm{Res}(f, -1) = 1$

   (h) $\mathrm{Res}(f, -1) = -1$

Soluzioni

1. La funzione f, essendo un polinomio, è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ e quindi è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^3$. Pertanto, vale la formula del gradiente, ossia

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle .$$

Si tratta, quindi, di calcolare il gradiente della funzione f. Si ha

$$\nabla f = (4x^3 + yz^2, 4y^3 + xz^2, 2xyz)$$

e

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = (4 - 1, -4 + 1, -2) = (3, -3, -2) .$$

Quindi, la derivata direzionale richiesta è

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = 3 \cdot \frac{2}{3} - 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} .$$

2. Poiché le funzioni f e g sono di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, la funzione F è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Poiché

$$F_x(x, y) = f'(x)g(y) \qquad \text{e} \qquad F_y(x, y) = f(x)g'(y) ,$$

si ha

$$F_x(x_0, y_0) = f'(x_0)g(y_0) \qquad \text{e} \qquad F_y(x_0, y_0) = f(x_0)g'(y_0) ,$$

Poiché f possiede un punto di massimo in x_0, si ha $f'(x_0) = 0$. Analogamente, si ha $g'(y_0) = 0$. Di conseguenza, si ha

$$F_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad F_y(x_0, y_0) = 0 ,$$

ossia $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ è un punto critico di F.

La matrice Hessiana di F è

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} F_{xx}(x, y) & F_{xy}(x, y) \\ F_{yx}(x, y) & F_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f''(x)g(y) & f'(x)g'(y) \\ f'(x)g'(y) & f(x)g''(y) \end{bmatrix} .$$

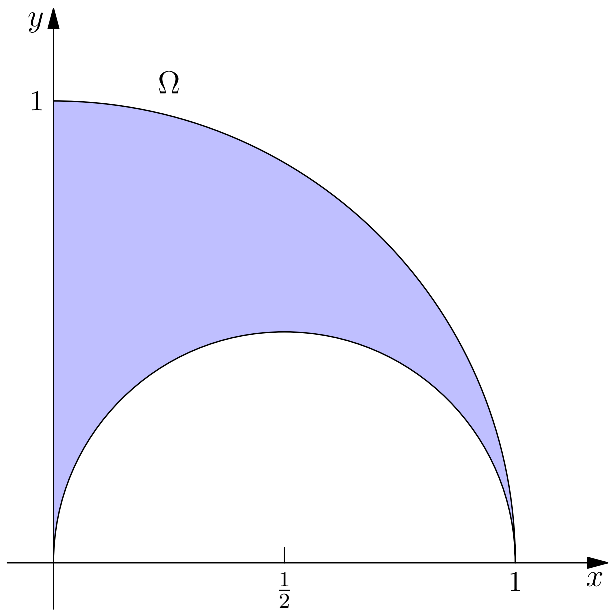
Quindi

$$H(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f''(x_0)g(y_0) & f'(x_0)g'(y_0) \\ f'(x_0)g'(y_0) & f(x_0)g''(y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f''(x_0) & 0 \\ 0 & -g''(y_0) \end{bmatrix}$$

essendo $f(x_0) = -1$ e $g(y_0) = 1$. Poiché f possiede un punto di massimo in x_0 e $f''(x_0) \neq 0$, si ha $f''(x_0) < 0$. Analogamente, si ha $g''(y_0) < 0$. Di conseguenza, la matrice hessiana $H(x_0, y_0)$ possiede due autovalori $\lambda_1 = f''(x_0) < 0$ e $\lambda_2 = -g''(x_0) > 0$ di segno opposto. Quindi, si ha una forma indefinita, ossia la funzione F possiede in $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ un punto di sella.

Le risposte corrette sono: (b), (e).

3. La regione Ω è la regione contenuta nel primo quadrante delimitata dalle due circonferenze $x^2 + y^2 = 1$ e $(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$:



In coordinate polari, la seconda circonferenza $x^2 + y^2 - x = 0$ è determinata dalla condizione $\rho^2 - \rho\cos\theta = 0$, ossia $\rho = \cos\theta$. Pertanto, la regione Ω è determinata dalle condizioni $\cos\theta \le \rho \le 1$ e $0 \le \theta \le \pi/2$. Allora, la massa totale di Ω è

$$
\begin{aligned}
M &= \int_\Omega \delta(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\Omega xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \left(\int_{\cos\theta}^1 \rho\sin\theta\rho\cos\theta\,\rho\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \left(\int_{\cos\theta}^1 \rho^3\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{\cos\theta}^1 \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta (1 - \cos^4\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos^5\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2}\cos^2\theta + \frac{1}{6}\cos^6\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{12}\,.
\end{aligned}
$$

4. Si ha

$$
\begin{cases}
x' = 4t\cos t - 2t^2\sin t \\
y' = 4t\sin t + 2t^2\cos t \\
z' = 4
\end{cases}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
\|f'(t)\|^2 &= (4t\cos t - 2t^2\sin t)^2 + (4t\sin t + 2t^2\cos t)^2 + 4^2 \\
&= 16t^2 + 4t^4 + 16 = 4(4 + 4t^2 + t^4) = 4(2 + t^2)^2
\end{aligned}
$$

ossia $\|f'(t)\| = 2(2 + t^2)$. Poiché $\|f'(t)\| \neq 0$ per ogni $t \in [0,1]$, la curva γ è regolare. Quindi, essendo di classe $\mathcal{C}^1$, la lunghezza di γ è

$$
L(\gamma) = \int_\gamma \mathrm{d}s = \int_0^1 \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 (2 + t^2)\,\mathrm{d}t = 2\left[2t + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{14}{3}\,.
$$

5. Il campo $\mathbf{F}$ è definito ed è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^3$. Inoltre, si ha

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 3y^2z\cos x & 6yz\sin x & 3y^2\sin x \end{vmatrix} \\
&= (6y\sin x - 6y\sin x, -3y^2\cos x + 3y^2\cos x, 6yz\cos x - 6yz\cos x) \\
&= (0,0,0)\,.
\end{aligned}
$$

Pertanto $\mathbf{F}$ è un campo vettoriale irrotazionale definito su un insieme semplicemente connesso. Questo significa che il campo $\mathbf{F}$ è conservativo, ossia che ammette funzione potenziale data da

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \int_0^x F_1(t,0,0)\mathrm{d}t + \int_0^y F_2(x,t,0)\mathrm{d}t + \int_0^z F_3(x,y,t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x 0\ \mathrm{d}t + \int_0^y 0\ \mathrm{d}t + \int_0^z 3y^2 \sin x \mathrm{d}t = 3y^2 z \sin x\,. \end{aligned}$$

Il lavoro di $\mathbf{F}$ è nullo lungo ogni curva chiusa e se γ è il segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$, dove $P \equiv (0,0,0)$ e $Q \equiv \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$, allore

$$L_\gamma(\mathbf{F}) = U(Q) - U(P) = 3\frac{\pi^2}{4}\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3}{4}\,.$$

Infine, si ha $\operatorname{div}\mathbf{F} = -3y^2 z\sin x + 6z\sin x$.

Quindi, le risposte corrette sono: (a), (c), (d), (f).

6. L'equazione differenziale è a variabili separabili con $a(x) = 1 + \mathrm{e}^x$ e $b(y) = \mathrm{e}^{-y}$. Poiché la funzione $a(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ e la funzione $b(y)$ è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}$, per il teorema di esistenza e unicità locale possiamo concludere che il problema di Cauchy dato possiede sempre una e una sola soluzione locale.

   Non ci sono soluzioni singolari. Separando le variabili e integrando, si ha

$$\int \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y = \int (1+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$$

   ossia

$$\mathrm{e}^y = x + \mathrm{e}^x + c \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

   Imponendo la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$, si ha $\mathrm{e}^{y_0} = x_0 + \mathrm{e}^{x_0} + c$, ossia $c = \mathrm{e}^{y_0} - x_0 - \mathrm{e}^{x_0}$. Pertanto, la soluzione è

$$y(x) = \ln(x + \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{y_0} - x_0 - \mathrm{e}^{x_0}).$$

   Se $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, si ha $y(x) = \log(x + \mathrm{e}^x)$.

   Se $x_0 = 0$ e $y_0 = 1$, si ha $y(x) = \log(x + \mathrm{e}^x + \mathrm{e} - 1)$.

   Se $x_0 = 0$ e $y_0 = \log 2$, si ha $y(x) = \log(x + \mathrm{e}^x + 1)$.

   In conclusione, le risposte corrette sono: (a), (d), (f).

7. Posto $a_n = \frac{2^n+1}{4^n+1} z^n$, si ha

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{2^{n+1}+1}{4^{n+1}+1} z^{n+1} \frac{4^n+1}{2^n+1}\frac{1}{z^n}\right| = \frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}\frac{4^n+1}{4^{n+1}+1}|z| \to \frac{2}{4}|z| = \frac{1}{2}|z|\,.$$

   Pertanto, la serie converge per $\frac{1}{2}|z| < 1$, ossia per $|z| < 2$.

8. La funzione

$$f(z) = \frac{3z\,\mathrm{e}^{z+1}}{z^3+1}$$

   possiede esattamente tre singolarità, date da poli semplici. tali singolarità sono date dalle radici cubiche di -1, che giacciono tutte sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1. Pertanto, la funzione f è certamente olomorfa nel disco $|z| < 1$. Infine, essendo -1 uno dei poli semplici della funzione, si ha

$$\operatorname{Res}(f,-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{3z\,\mathrm{e}^{z+1}}{z^2 - z + 1} = -1\,.$$

   Quindi, le risposte esatte sono: (b), (d), (h).