Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — *Secondo Appello – 2 Luglio 2021*

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tale che $f'(0) \neq 0$. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$F(x, y) = f(xy)\,.$$
Allora la funzione F
   (a) ha piano tangente orizzontale in $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$
   (b) non possiede un punto di critico in $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$
   (c) possiede un punto di critico in $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$
   (d) possiede un punto di massimo in $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$
   (e) possiede un punto di minimo in $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$
   (f) possiede un punto di sella in $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.

2. Sia $F(x, y) = x^2 y + \mathrm{e}^x \sin y + \mathrm{e}^x - 1$. Sia g una funzione definita in un intorno U di $x_0 = 0$, di classe $\mathcal{C}^1(U)$, tale che $F(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in U$ e $g(0) = 0$.
   (a) Non esistono funzioni g con le proprietà richieste.
   (b) Esiste un'unica funzione g con le proprietà richieste per un opportuno intorno U.
   (c) Se la funzione g esiste, allora $g'(0) = -1$
   (d) Se la funzione g esiste, allora $g'(0) = -2$
   (e) L'equazione $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ in un intorno di $x_0 = 0$ che ha per tangente in $x_0 = 0$ la retta $y = -x$
   (f) L'equazione $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ in un intorno di $x_0 = 0$ che ha per tangente in $x_0 = 0$ la retta $y = -2x$.

3. La curva
$$\gamma : \begin{cases} x = t + \mathrm{e}^t \\ y = 2t - \mathrm{e}^t \\ z = 3t + 2\mathrm{e}^t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$
   (a) è regolare
   (b) è biregolare
   (c) è piana
   (d) è gobba
   (e) ha versore normale costante
   (f) ha versore binormale costante
   (g) ha piano osculatore costante
   (h) ha piano rettificante costante

4. Calcolare il flusso del campo vettoriale
$$\mathbf{F} = (x^2 \mathrm{e}^{-y} + xy \sin z, 2x\mathrm{e}^{-y} + y, 3x\mathrm{e}^{-y} - z + y \cos z)$$
attraverso la superficie $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 4z - 10 = 0$, orientata positivamente.

5. Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \mathrm{e}^x \cosh y \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$
La formula di MacLaurin del terzo ordine della soluzione $y = y(x)$ di questo problema

(a) è $y(x) = x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$

(b) è $y(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$ per $x \to 0$

(c) è $y(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \to 0$

(d) è $y(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \to 0$

(e) è la stessa di $e^x - 1$

(f) è la stessa di $\ln(1+x)$

(g) è la stessa di $\ln(1-x)$

(h) è la stessa di $-\ln(1-x)$

(i) non è calcolabile.

6. L'equazione differenziale $6y'' - 7y' + y = 0$ ammette

(a) ∞^1 soluzioni

(b) ∞^2 soluzioni

(c) radici caratteristiche complesse e coniugate

(d) e^x e e^{6x} come soluzioni linearmente indipendenti

(e) e^x e $e^{x/6}$ come soluzioni linearmente indipendenti

(f) soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ e limitate per $x \to -\infty$

(g) infinite soluzioni con un punto di massimo in $x_0 = 0$

(h) infinite soluzioni con un punto di minimo in $x_0 = 0$.

7. Si considerino le funzioni 2π-periodiche $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x & x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} -1 & x = 0 \\ x & x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi). \end{cases}$$

Siano $F(x)$ e $G(x)$ le rispettive serie di Fourier. Allora

(a) $F(x)$ e $G(x)$ convergono per ogni $x \in \mathbb{R}$

(b) $F(x) = f(x)$ e $G(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

(c) $F(x) = G(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

(d) $F(0) = 1/2$ e $G(0) = -1/2$

(e) $F(0) = 1$ e $G(0) = -1$

(f) $F(0) = 0$ e $G(0) = 0$

8. Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \frac{e^z \cos z}{1 + z^2} \, dz$$

dove la curva $\gamma : |z - 1| = 1$ è orientata positivamente.

9. Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)(z + i)}.$$

Allora

(a) f non ha punti singolari

(b) f ha un solo punto singolare

(c) f ha tre poli semplici

(d) f è una funzione olomorfa per $|z| < 1$

(e) f è una funzione olomorfa per $|z| > 1$

(f) f è una funzione olomorfa per $|z - 1 + \mathrm{i}| < 1$

(g) $\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}) = \frac{\mathrm{e}}{4}$, $\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}) = \frac{4}{\mathrm{e}}$

(h) $\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}) = \frac{1}{4\mathrm{e}}$ e $\mathrm{Res}(f, -\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{e}}{4}$

(i) $\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}) = -\frac{1}{4\mathrm{e}}$ e $\mathrm{Res}(f, -\mathrm{i}) = -\frac{\mathrm{e}}{4}$

(j) $\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}) = -\frac{4}{\mathrm{e}}$ e $\mathrm{Res}(f, -\mathrm{i}) = -\frac{\mathrm{e}}{4}$

(k) $\mathrm{Res}(f, 0) = -1$, $\mathrm{Res}(f, 1) = \mathrm{i}$

(l) $\mathrm{Res}(f, 0) = 0$, $\mathrm{Res}(f, 1) = 1$

(m) $\mathrm{Res}(f, 0) = 0$, $\mathrm{Res}(f, 1) = 0$

Soluzioni

1. Poiché la funzione f è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, la funzione F è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Poiché

$$F_x(x,y) = y f'(xy) \qquad \text{e} \qquad F_y(x,y) = x f'(xy)\,,$$

si ha

$$F_x(0,0) = 0 \qquad \text{e} \qquad F_y(0,0) = 0\,,$$

Quindi $O = (0,0)$ è un punto critico di f, dove il piano tangente è orizzontale.

La matrice Hessiana di F è

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} F_{xx}(x,y) & F_{xy}(x,y) \\ F_{yx}(x,y) & F_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^2 f'(xy) & f'(xy) + xy f'(xy) \\ f'(xy) + xy f'(xy) & x^2 f''(xy) \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & f'(0) \\ f'(0) & 0 \end{bmatrix}$$

e $\det H(0,0) = -f'(0) < 0$, essendo $f'(0) \neq 0$. Di conseguenza, si ha una forma indefinita e la funzione F possiede in O un punto di sella.

In conclusione, le risposte esatte sono (a), (c), (f).

2. La funzione F è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $F(0,0) = 0$. Poiché

$$F_y(x,y) = x^2 + \mathrm{e}^x \cos y\,, \qquad F_y(0,0) = 1 \neq 0\,,$$

per il teorema del Dini, l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ in un intorno di $x_0 = 0$, ossia esiste una funzione g definita in un opportuno intorno U di $x_0 = 0$, di classe $\mathcal{C}^1(U)$, tale che $F(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in U$ e $g(0) = 0$. Poiché

$$F_x(x,y) = 2xy + \mathrm{e}^x \sin y + \mathrm{e}^x\,, \qquad F_x(0,0) = 1\,,$$

si ha

$$g'(0) = -\frac{F_x(0,0)}{F_y(0,0)} = -1\,.$$

Quindi, la retta tangente in $x_0 = 0$ della funzione g ha equazione $y = -x$.

In conclusione, le risposte esatte sono: (b), (c), (e).

3. Si ha

$$\begin{cases} x' = 1 + \mathrm{e}^t \\ y' = 2 - \mathrm{e}^t \\ z' = 3 + 2\mathrm{e}^t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x'' = \mathrm{e}^t \\ y'' = -\mathrm{e}^t \\ z'' = 2\mathrm{e}^t\,. \end{cases}$$

Quindi, si ha

$$f'(t) \wedge f''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 + \mathrm{e}^t & 2 - \mathrm{e}^t & 3 + 2\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^t & 2\mathrm{e}^t \end{vmatrix} = \mathrm{e}^t(7, 1, -3)\,.$$

Pertanto, il versore binormale

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{59}}(7, 1, -3)$$

è costante. Di conseguenza la curva γ è biregolare, e quindi regolare, ed è piana. In particolare, il piano che la contiene (che coincide con il piano osculatore) è

$$7(x-1) + 1(y+1) - 3(z-2) = 0$$

ossia

$$7x + y - 3z = 0\,.$$

Tale equazione si può ricavare direttamente dalle equazioni parametriche eliminando t ed e^t.

Le risposte corrette sono: (a), (b), (c), (f), (g).

4. Il campo $\mathbf{F}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^3$. La superficie Σ è una sfera che delimita una regione Ω xyz-semplice. Allora, per calcolare il flusso richiesto, possiamo utilizzare il teorema della divergenza:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Poiché

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 2x\mathrm{e}^{-y} + y\sin z - 2x\mathrm{e}^{-y} + 1 - 1 - y\sin z = 0\,,$$

si ha $\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = 0$.

5. L'equazione differenziale è a variabili separabili con $a(x) = \mathrm{e}^x$ (continua su tutto $\mathbb{R}$) e $b(y) = \cosh y$ (di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}$). Per il teorema di esistenza e unicità locale, il problema di Cauchy dato ammette una e una sola soluzione (locale). Tale soluzione soddisfa il sistema

$$\begin{cases} y'(x) = \mathrm{e}^x\cosh y(x) \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Allora, si ha

$$\begin{aligned} y''(x) &= \mathrm{e}^x\cosh y(x) + \mathrm{e}^x y'(x)\sinh y(x) \\ y'''(x) &= \mathrm{e}^x\cosh y(x) + 2\mathrm{e}^x y'(x)\sinh y(x) + \mathrm{e}^x y''(x)\sinh y(x) + \mathrm{e}^x y'(x)^2\cosh y(x)\,. \end{aligned}$$

Pertanto, usando la condizione iniziale $y(0) = 0$, si ha $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$ e $y''(0) = 2$, e la formula di MacLaurin cercata è data da

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + y''(0)\frac{x^2}{2} + y'''(0)\frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad x \to 0\,.$$

Infine, si ha

$$-\ln(1-t) = \ln\frac{1}{1-t} == x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad x \to 0\,.$$

Le risposte corrette sono (c) e (h).

6. L'equazione differenziale data è lineare omogenea del secondo ordine. Quindi l'insieme delle soluzioni forma uno spazio vettoriale di dimensione 2, ossia l'equazione ammette ∞^2 soluzioni.

Il polinomio caratteristico è $6\lambda^2 - 7\lambda + 1 = 0$ e ha come radici $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1/6$. Ci sono pertanto due radici caratteristiche reali e distinte e l'integrale generale è dato da

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{x/6} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Tutte queste funzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$ e

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty}(c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{x/6}) = 0 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Infine, si ha

$$y'(x) = c_1\mathrm{e}^x + \frac{c_2}{6}\,\mathrm{e}^{x/6}\,, \qquad y''(x) = c_1\mathrm{e}^x + \frac{c_2}{36}\,\mathrm{e}^{x/6} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Se in $x_0 = 0$ si ha un punto di massimo e di minimo, allora $y'(0) = 0$, ossia $c_1 = -c_2/6$. Inoltre, si ha $y''(0) = -\frac{5}{36}\,c_2$. Quindi, per $c_2 > 0$, si ha un punto di massimo, mentre per $c_2 < 0$, si ha un punto di minimo.

Pertanto, le risposte corrette sono: (b), (e), (f), (g), (h).

7. Le funzioni f e g sono regolari a tratti e differiscono solo in un punto, $x_0 = 0$. Questo significa che le loro serie di Fourier $F(x)$ e $G(x)$ convergono per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $F(x) = G(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poiché f e g sono continue solo su $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, si ha che $F(x) = f(x)$

e $G(x) = g(x)$ solo per $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ (più estensione per periodicità), mentre nei punti di non continutà si ha

$$F(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = 0 \qquad G(0) = \frac{g(0^+) + g(0^-)}{2} = 0$$
$$F(\pi) = \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = 0 \qquad G(\pi) = \frac{g(\pi^+) + g(\pi^-)}{2} = 0$$
$$F(-\pi) = \frac{f(-\pi^+) + f(-\pi^-)}{2} = 0 \qquad G(-\pi) = \frac{g(-\pi^+) + g(-\pi^-)}{2} = 0\,.$$

Quindi, le risposte esatte sono: (a), (c), (f).

8. La funzione
$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^z \cos z}{1 + z^2}$$
possiede due poli semplici $z_{1,2} = \pm \mathrm{i}$. Pertanto è olomorfa in tutto $\mathbb{C} \setminus \{\pm\mathrm{i}\}$. Poiché γ non contiene alcuna sigolarità di f, per il teorema integrale di f, si ha $I = 0$.

9. La funzione
$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)(z+\mathrm{i})} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})^2}$$
possiede solo due punti singolari, dati da un polo semplice $z_1 = \mathrm{i}$ e da un polo doppio $z_2 = -\mathrm{i}$. Pertanto, si ha
$$\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}) = \lim_{z \to \mathrm{i}} (z - \mathrm{i}) f(z) = \lim_{z \to \mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})^2} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}^2}}{(2\mathrm{i})^2} = -\frac{1}{4\mathrm{e}}$$
e
$$\mathrm{Res}(f, -\mathrm{i}) = \lim_{z \to -\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z+\mathrm{i})^2 f(z) = \lim_{z \to -\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z - \mathrm{i}} = \lim_{z \to -\mathrm{i}} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}(z-\mathrm{i}) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z-\mathrm{i})^2} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}^2}}{(-2\mathrm{i})^2} = -\frac{\mathrm{e}}{4}\,.$$
Poiché $z_0 = 0$ e $z_0' = 1$ non sono punti singolare di f, si ha $\mathrm{Res}(f, 0) = \mathrm{Res}(f, 1) = 0$.