Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — *Primo compito in itinere – 9 Novembre 2021*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora.*

---

1. (Domanda a risposta multipla, 6 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^6+y^6}}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

(a) La funzione f è continua in $\mathbf{x}_0 = (0,0)$. ☐
(b) La funzione f è derivabile in $\mathbf{x}_0 = (0,0)$. ☐
(c) La funzione f possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0 = (0,0)$. ☐
(d) La funzione f è differenziabile in $\mathbf{x}_0 = (0,0)$. ☐
(e) La funzione f è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. ☐
(f) Il punto $\mathbf{x}_0 = (0,0)$ è un punto critico di f. ☐
(g) Il punto $\mathbf{x}_0 = (0,0)$ è un punto di massimo per f. ☐
(h) Il punto $\mathbf{x}_0 = (0,0)$ è un punto di minimo per f. ☐
(i) Il punto $\mathbf{x}_0 = (0,0)$ è un punto di sella per f. ☐

---

2. (Domanda a risposta singola, 3 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2} + x - y\,.$$

L'equazione del piano tangente di f in corrispondenza di $(0,0)$ è

(a) $x + y - z + 1 = 0$ ○
(b) $x - y + z - 1 = 0$ ○
(c) $x - y - z + 1 = 0$ ○
(d) $x + y + z - 1 = 0$ ○
(e) Nessuna delle risposte precedenti ○

---

3. (Domanda a risposta multipla, 4 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e sia

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 \leq y \leq 1\}.$$

(a) La regione Ω è un insieme aperto. ☐
(b) La regione Ω è un insieme limitato. ☐
(c) La regione Ω è un insieme compatto. ☐
(d) La funzione f ammette massimo e minimo assoluti su Ω. ☐
(e) La funzione f può non ammettere massimo e minimo assoluti su Ω. ☐
(f) Se $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$, allora f non ammette massimi né minimi su Ω. ☐
(g) La funzione f può essere illimitata su Ω. ☐
(h) La funzione f può non essere di classe $\mathcal{C}^1$ su Ω. ☐

4. (Domanda a risposta multipla, 4 puntì) Si consideri la trasformazione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$F(x, y) = (x^2 + xy + y^2, x^2 - xy + y^2)\,.$$

(a) F è regolare su tutto $\mathbb{R}^2$ ☐
(b) F è regolare su $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ☐
(c) F è localmente invertibile in $\mathbf{0} = (0, 0)$ ☐
(d) F è localmente invertibile in $\mathbf{x}_0 = (1, 0)$ ☐
(e) F è iniettiva ☐
(f) F è suriettiva ☐
(g) L'immagine di F è contenuta nel primo quadrante ☐
(h) L'immagine di F è contenuta nel quarto quadrante ☐

---

5. (Domanda a risposta singola, 6 punti) Si consideri l'integrale doppio

$$I = \iint_\Omega xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2 + y^2 \leq 4\,,\ x^2 + y^2 - 2x \geq 0\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$.

(a) $I = 0$ ○
(b) $I = \dfrac{2}{3}$ ○
(c) $I = \dfrac{\pi}{4}$ ○
(d) $I = \dfrac{4}{3}$ ○
(e) $I = \dfrac{\pi}{2}$ ○

---

6. (Domanda a risposta singola, 6 punti) Il baricentro della regione

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2 + y^2 \leq 1\,,\ 0 \leq z \leq 1\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\},$$

rispetto alla densità volumetrica $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$, è

(a) $G \equiv \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ ○
(b) $G \equiv \left(\dfrac{4}{3\pi}, \dfrac{4}{3\pi}, \dfrac{1}{2}\right)$ ○
(c) $G \equiv \left(\dfrac{8}{5\pi}, \dfrac{8}{5\pi}, \dfrac{1}{2}\right)$ ○
(d) $G \equiv \left(\dfrac{8}{5\pi}, \dfrac{8}{5\pi}, \dfrac{4}{3\pi}\right)$ ○

---

7. (Domanda a risposta singola, 4 punti) Si consideri l'integrale di linea

$$I = \int_\gamma \sqrt{x^2 + y^2 + 4z}\,\mathrm{d}s\,,$$

dove

$$\gamma : \begin{cases} x = t\cos t - \sin t \\ y = t\sin t + \cos t \\ z = t + t^2 \end{cases} \qquad t \in [0, 1]\,.$$

(a) $I = 0$ ○

(b) $I = 1$ ◯

(c) $I = \dfrac{1}{3}$ ◯

(d) $I = \dfrac{4}{3}$ ◯

(e) $I = \dfrac{14}{3}$ ◯