Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II *Secondo compito in itinere – 13 Gennaio 2022*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni. *Segare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora e 30 minuti.*

---

1. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Calcolare l'area della superficie

$$\Sigma : \begin{cases} x = u \\ y = u \sin v \\ z = u \cos v \end{cases} \qquad u \in [0,1]\,, \ v \in [0,\pi]\,.$$

$\mathcal{A}(\Sigma) =$

---

2. (Domanda a risposta singola, 3 punti) Il lavoro del campo

$$\mathbf{F} = (2x - y + 3z, 3x - 3y - z, x + y - 2z)$$

lungo la curva

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

(orientata opportunamente) è

(a) $L = 0$ ○
(b) $L = 1$ ○
(c) $L = \pi/2$ ○
(d) $L = \pi$ ○
(e) $L = 2\pi$ ○
(f) $L = 10\pi$ ○
(g) $L = 30\pi$ ○
(h) Nessuna delle risposte precedenti. ○

---

3. (Domanda a risposta singola, 3 punti) Il flusso del campo

$$\mathbf{F} = (4x + 3x\mathrm{e}^y z, 2x - 3y - 3\mathrm{e}^y z, 5\sin y + 2z)$$

attraverso la superficie

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 2z + 13 = 0$$

orientata positivamente è

(a) $\Phi = 0$ ○
(b) $\Phi = 1$ ○
(c) $\Phi = \pi$ ○
(d) $\Phi = -2\pi$ ○
(e) $\Phi = \frac{3}{2}\pi$ ○
(f) $\Phi = 4\pi$ ○
(g) $\Phi = -\frac{4}{3}\pi$ ○
(h) Nessuna delle risposte precedenti. ○

---

4. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) L'equazione differenziale

$$y'(x) - \frac{x}{1-x^2}\, y(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

(a) è a variabili separabili ☐
(b) è lineare ☐
(c) ammette soluzioni definite su tutto l'intervallo $(-1, 1)$ ☐
(d) ammette soluzioni definite su tutto l'intervallo $(1, +\infty)$ ☐
(e) ammette soluzioni definite su tutto l'intervallo $(-\infty, -1)$ ☐
(f) ammette soluzioni costanti ☐
(g) ammette solo soluzioni illimitate ☐
(h) ammette infinite soluzioni che in $x_0 = 0$ possiedono retta tangente orizzontale. ☐

---

5. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 0\,.$$

$y(x) =$

---

6. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri la serie complessa $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^2+1}\, z^n$.

(a) Il raggio di convergenza è $r = 1$. ☐
(b) Il raggio di convergenza è $r = 2$. ☐
(c) Il raggio di convergenza è $r = +\infty$. ☐
(d) La serie converge per $|z| = 1$. ☐
(e) La serie converge per $|z| < 1$. ☐
(f) La serie converge per $1 < |z| < 2$. ☐
(g) La serie converge in $z_0 = 1$. ☐
(h) La serie converge in $z_0 = -1$. ☐
(i) La serie converge in $z_0 = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$. ☐
(j) La serie converge in $z_0 = \frac{2-\mathrm{i}}{2}$. ☐

---

7. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica definita da

$$f(x) = x^2 \sin(x^4) \qquad \text{per } x \in [-\pi, \pi)$$

e sia $F(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ la sua serie di Fourier.

(a) La serie $F(x)$ converge in media quadratica su $[-\pi, \pi]$. ☐
(b) La serie $F(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. ☐
(c) La serie $F(x)$ converge puntualmente in $x = \pm\pi$, ma non a $f(x)$. ☐
(d) La serie $F(x)$ definisce una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$. ☐
(e) I coefficienti a_n sono tutti nulli. ☐
(f) I coefficienti b_n sono tutti nulli. ☐

---

8. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la funzione definita da $f(z) = \sin|z|$.

(a) f è illimitata su $\mathbb{C}$. ☐
(b) f è continua su $\mathbb{C}$. ☐
(c) f è intera. ☐
(d) f è olomorfa per $|z| < 1$. ☐
(e) f si annulla lungo infinite circonferenze concentriche. ☐
(f) f si annulla solo per valori reali di z . ☐
(g) $f\big(\frac{1+\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}\pi\big) = 1$. ☐

Cognome e Nome: ______________________________

Esercizio da svolgere

(6 punti) Calcolare l'integrale

$$I_R = \int_{\gamma_R} \frac{1}{z(z^2+1)} \cos\frac{\pi \mathrm{i}}{z} \, \mathrm{d}z$$

dove $\gamma_R \, : \, |z - 1 - \mathrm{i}| = R$, orientata positivamente.

Cognome e Nome: ______________________

Domande teoriche

1. (0.5 punti) Dare la definizione di campo conservativo.
2. (0.5 punti) Dare la definizione di funzione armonica.
3. (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di Gauss-Green per regioni piane y-semplici.