Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — *Secondo compito in itinere – 13 Gennaio 2022*

**Cognome:** ____________________ **Matricola:** ____________________

**Nome:** ____________________ **Punteggio Totale:** ____________________

**Istruzioni.** *Segare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

**Tempo.** *1 ora e 30 minuti.*

---

1. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Calcolare l'area della superficie

$$\Sigma : \begin{cases} x = u \\ y = u \sin v \\ z = u \cos v \end{cases} \qquad u \in [0,1]\,,\ v \in [0,\pi]\,.$$

$\mathcal{A}(\Sigma) = \pi/\sqrt{2}\,.$

---

2. (Domanda a risposta singola, 3 punti) Il lavoro del campo

$$\mathbf{F} = (2x - y + 3z, 3x - 3y - z, x + y - 2z)$$

lungo la curva

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

(orientata opportunamente) è

- (a) $L = 0$ ○
- (b) $L = 1$ ○
- (c) $L = \pi/2$ ○
- (d) $L = \pi$ ○
- (e) $L = 2\pi$ ○
- (f) $L = 10\pi$ ✓
- (g) $L = 30\pi$ ○
- (h) Nessuna delle risposte precedenti. ○

---

3. (Domanda a risposta singola, 3 punti) Il flusso del campo

$$\mathbf{F} = (4x + 3xe^y z, 2x - 3y - 3e^y z, 5 \sin y + 2z)$$

attraverso la superficie

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 2z + 13 = 0$$

orientata positivamente è

- (a) $\Phi = 0$ ○
- (b) $\Phi = 1$ ○
- (c) $\Phi = \pi$ ○
- (d) $\Phi = -2\pi$ ○
- (e) $\Phi = \frac{3}{2}\pi$ ○
- (f) $\Phi = 4\pi$ ✓
- (g) $\Phi = -\frac{4}{3}\pi$ ○
- (h) Nessuna delle risposte precedenti. ○

---

4. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) L'equazione differenziale

$$y'(x) - \frac{x}{1-x^2}\, y(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

(a) è a variabili separabili ☑
(b) è lineare ☑
(c) ammette soluzioni definite su tutto l'intervallo $(-1,1)$ ☑
(d) ammette soluzioni definite su tutto l'intervallo $(1,+\infty)$ ☑
(e) ammette soluzioni definite su tutto l'intervallo $(-\infty,-1)$ ☑
(f) ammette soluzioni costanti ☑
(g) ammette solo soluzioni illimitate ☐
(h) ammette infinite soluzioni che in $x_0 = 0$ possiedono retta tangente orizzontale. ☑

---

5. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 0\,.$$

$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{2x} \cos x + c_2 \mathrm{e}^{2x} \sin x\,,\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$

---

6. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri la serie complessa $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^2+1}\, z^n\,.$

(a) Il raggio di convergenza è $r = 1\,.$ ☑
(b) Il raggio di convergenza è $r = 2\,.$ ☐
(c) Il raggio di convergenza è $r = +\infty\,.$ ☐
(d) La serie converge per $|z| = 1\,.$ ☐
(e) La serie converge per $|z| < 1\,.$ ☑
(f) La serie converge per $1 < |z| < 2\,.$ ☐
(g) La serie converge in $z_0 = 1\,.$ ☐
(h) La serie converge in $z_0 = -1\,.$ ☑
(i) La serie converge in $z_0 = \frac{1+\mathrm{i}}{2}\,.$ ☑
(j) La serie converge in $z_0 = \frac{2-\mathrm{i}}{2}\,.$ ☐

---

7. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $2\pi$-periodica definita da

$$f(x) = x^2 \sin(x^4) \qquad \text{per } x \in [-\pi, \pi)$$

e sia $F(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n\geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ la sua serie di Fourier.

(a) La serie $F(x)$ converge in media quadratica su $[-\pi,\pi]\,.$ ☑
(b) La serie $F(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}\,.$ ☑
(c) La serie $F(x)$ converge puntualmente in $x = \pm\pi$, ma non a $f(x)\,.$ ☐
(d) La serie $F(x)$ definisce una funzione continua su tutto $\mathbb{R}\,.$ ☑
(e) I coefficienti $a_n$ sono tutti nulli. ☐
(f) I coefficienti $b_n$ sono tutti nulli. ☑

---

8. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la funzione definita da $f(z) = \sin|z|\,.$

(a) $f$ è illimitata su $\mathbb{C}\,.$ ☐
(b) $f$ è continua su $\mathbb{C}\,.$ ☑
(c) $f$ è intera. ☐
(d) $f$ è olomorfa per $|z| < 1\,.$ ☐
(e) $f$ si annulla lungo infinite circonferenze concentriche. ☑
(f) $f$ si annulla solo per valori reali di $z\,.$ ☐
(g) $f\big(\frac{1+\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}\pi\big) = 1\,.$ ☑

## Esercizio da svolgere

(6 punti) Calcolare l'integrale

$$I_R = \int_{\gamma_R} \frac{1}{z(z^2+1)} \cos\frac{\pi \mathrm{i}}{z} \, \mathrm{d}z$$

dove $\gamma_R \, : \, |z-1-\mathrm{i}| = R$, orientata positivamente.

Risposta

Si ha

$$\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}) = \mathrm{Res}(f, -\mathrm{i}) = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Res}(f, 0) = -1$$

e quindi

1. $R < 1: \ I_R = 0$
2. $1 < R < \sqrt{2}: \ I_R = \pi \mathrm{i}$
3. $\sqrt{2} < R < \sqrt{5}: \ I_R = -\pi \mathrm{i}$
4. $R > \sqrt{5}: \ I_R = 0.$

Per $R = 1, \sqrt{2}, \sqrt{5}$, l'integrale non è definito.

## Domande teoriche

1. (0.5 punti) Dare la definizione di campo conservativo.
2. (0.5 punti) Dare la definizione di funzione armonica.
3. (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di Gauss-Green per regioni piane $y$-semplici.