Analisi Matematica II *Primo Appello – 2 Febbraio 2022*

Cognome: ______________ **Matricola:** ______________

Nome: ______________ **Punteggio Totale:** ______________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora e 30 minuti.*

---

1. (Domanda a risposta singola, 2 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\,\mathrm{e}^{xy}\,.$$

Sia $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)$ la derivata direzionale di f lungo il versore $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nel punto $\mathbf{x}_0 = (1,1)$.

(a) $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = 0$ ○
(b) $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = 1$ ○
(c) $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = 4\,\mathrm{e}$ ○
(d) $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = 4\,\mathrm{e}\,(1+\sqrt{3})$ ○
(e) $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = 2\,\mathrm{e}\,(1+\sqrt{3})$ ✓
(f) $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = 2\,(1+\sqrt{3})$ ○
(g) $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)$ non esiste. ○

---

2. (Domanda a risposta singola, 2 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = x^2y + xy^2 + xy\,.$$

(a) f non possiede punti critici. ○
(b) f possiede tre punti critici. ○
(c) f possiede infiniti punti critici. ○
(d) f possiede un punto di sella in $(1,0)$. ○
(e) f possiede un punto di sella in $(0,1)$. ○
(f) f possiede un punto di minimo in $(1,1)$. ○
(g) f possiede un punto di minimo in $(-1,-1)$. ○
(h) f possiede un punto di massimo in $(0,0)$. ○
(i) f possiede un punto di massimo in $(-1/3,-1/3)$. ✓

---

3. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri la trasformazione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$F(x,y) = \left(\mathrm{e}^{x^2+y}, \mathrm{e}^{x+y^2}\right).$$

(a) F è regolare su tutto $\mathbb{R}^2$. ☐
(b) I punti singolari di F si dispongono lungo una parabola. ☐
(c) I punti singolari di F si dispongono lungo una ellisse. ☐
(d) I punti singolari di F si dispongono lungo una iperbole. ☑
(e) F è iniettiva. ☐
(f) F è suriettiva. ☐
(g) L'immagine di F è contenuta nel primo quadrante. ☑
(h) L'immagine di F è limitata. ☐

---

4. (Domanda a risposta singola, 2 punti) Si consideri l'integrale doppio

$$I = \iint_\Omega xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\,,\ x + y \geq 1\}\,.$

(a) $I = 0\,.$ ○

(b) $I = 1\,.$ ○

(c) $I = -\frac{1}{2}\,.$ ○

(d) $I = \frac{1}{4}\,.$ ○

(e) $I = -\frac{1}{6}\,.$ ○

(f) $I = \frac{1}{12}\,.$ ✓

(g) $I = -\frac{1}{24}\,.$ ○

---

5. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri l'integrale di linea

$$I = \int_\gamma \frac{1}{(1 + 3x + y + z)^{3/2}} \, \mathrm{d}s\,.$$

dove

$$\gamma : \begin{cases} x = t + t^2/2 \\ y = 1 - t \\ z = t^2/2 \end{cases} \qquad t \in [0, 1]\,.$$

(a) γ è contenuta nel piano $\pi \ : \ x + y + z = 1\,.$ ☐

(b) γ è contenuta nel piano $\pi \ : \ x - y + z = 1\,.$ ☐

(c) γ è contenuta nel piano $\pi \ : \ x + y - z = 1\,.$ ☑

(d) γ non è piana. ☐

(e) γ è regolare. ☑

(f) γ è biregolare. ☑

(g) $I = 0\,.$ ☐

(h) $I = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\,.$ ☐

(i) $I = \frac{\pi}{6\sqrt{2}}\,.$ ☐

(j) $I = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\,.$ ☑

---

6. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Il lavoro del campo

$$\mathbf{F} = (x - y - 2z, 2x + 3y - z, x + 2y + 2z)$$

lungo la curva (orientata opportunamente)

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y - 2z + 19 = 0 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

è $L = 2\sqrt{3}\,\pi$.

---

7. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Il flusso del campo

$$\mathbf{F} = (x + y + z, x - y + z, xy)$$

attraverso la superficie

$$\Sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 0 \end{cases} \qquad u, v \in [0, 1]$$

orientata mediante il versore $\mathbf{k}$ è $\Phi = 1/4\,.$

---

8. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = \mathrm{e}^x \,.$$

$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{2x} + c_2 x \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x \,, \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$

---

9. (Domanda a risposta multipla, 2 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica definita da

$$f(x) = \sin x \cdot \sin(x^2) \qquad \text{per } x \in [-\pi, \pi)$$

e sia $F(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ la sua serie di Fourier.

(a) La serie $F(x)$ converge in media quadratica su $[-\pi, \pi]$. ☑

(b) La serie $F(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. ☑

(c) La serie $F(x)$ converge puntualmente in $x = \pm\pi$, ma non a $f(x)$. ☐

(d) La serie $F(x)$ definisce una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$. ☑

(e) I coefficienti a_n sono tutti nulli. ☑

(f) I coefficienti b_n sono tutti nulli. ☐

---

10. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Scrivere il disco di convergenza della serie complessa

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n} z^n \,.$$

$D = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| < \mathrm{e}\}\,.$

Esercizio da svolgere (5 punti)

Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \frac{e^{\pi/z^3}}{z(1 - i\, z^3)}\, dz$$

dove $\gamma\,:\,|z| = 1/2$ è orientata negativamente.

Risposta

Si ha $\operatorname{Res}(f, 0) = -1$ e

$$I = -2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = 2\pi i\,.$$

Domande teoriche (4 punti)

1. (0.5 punti) Dare la definizione di derivata direzionale di una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
2. (0.5 punti) Enunciare il teorema di Liouville per le funzioni complesse.
3. (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di struttura dello spazio delle soluzioni di un'equazione lineare generale.