Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — *Secondo Appello – 10 Giugno 2022*

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________ **Punteggio Totale:** ____________________

Istruzioni. *Segare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora e 20 minuti.*

---

1. (Domanda a risposta singola, 1 punti) L'equazione del piano tangente al grafico della funzione

$$f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$$

nel punto $\mathbf{x}_0 = (1,1)$ è

① $x + y + z = 0$
② $x + y - z = 0$
③ $x - y + z + \log 2 = 0$
④ $x - y - z - \log 2 = 0$
⑤ $x + y + z - 2 + \log 2 = 0$
⑥ $x + y - z - 2 + \log 2 = 0$
⑦ $x + y - z - 2 - \log 2 = 0$
⑧ $x + y - z + 2 - \log 2 = 0\,.$

---

2. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{1}{1 + |xy|}\,.$$

Allora

[1] f è continua in $(0,0)$
[2] f non è derivabile in $(0,0)$
[3] f possiede tutte le derivate direzionali in $(0,0)$
[4] f non è differenziabile in $(0,0)$
[5] f ha un piano tangente in $(0,0)$ di equazione $z = 1$
[6] f è limitata
[7] f possiede un punto di minimo in $(0,0)$
[8] f possiede un punto di massimo in $(0,0)$
[9] f possiede solo un numero finito di punti estremanti.

---

3. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri la regione

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{2x + 2y + 1}{x^2 + y^2} \geq 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Allora

[1] Ω è un insieme aperto
[2] Ω è un insieme chiuso
[3] Ω è un insieme limitato
[4] Ω è un insieme compatto
[5] Ω è un insieme connesso
[6] Ω è un insieme semplicemente connesso
[7] una funzione continua $f : \Omega \to \mathbb{R}$ possiede necessariamente un punto di massimo
[8] un campo vettoriale $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}$ irrotazionale è necessariamente conservativo.

---

4. (Domanda a risposta singola, 2 punti) Si consideri l'integrale doppio

$$I = \iint_\Omega \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2+y^2 \le 4\,,\ \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}\,x\}$. Allora

① $I = +\infty$ ③ $I = 0$ ⑤ $I = 1+\sqrt{3}$ ⑦ $I = -1+\sqrt{3}$

② $I = -\infty$ ④ $I = 1$ ⑥ $I = 1-\sqrt{3}$ ⑧ $I = -1-\sqrt{3}$.

---

5. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri il campo

$$\mathbf{F} = (\mathrm{e}^y \cos(x\mathrm{e}^y), x\mathrm{e}^y \cos(x\mathrm{e}^y)).$$

Allora

- [1] $\mathbf{F}$ è irrotazionale
- [2] $\mathbf{F}$ è conservativo
- [3] $\mathbf{F}$ possiede potenziale $U(x,y) = \cos(x\mathrm{e}^y)$
- [4] $\mathbf{F}$ non possiede funzioni potenziali
- [5] il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo una circonferenza $x^2+y^2=r^2$ è sempre nullo
- [6] il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo un segmento di estremi $P_1 \equiv (0,y_1)$ e $P_2 \equiv (0,y_2)$ è sempre nullo
- [7] il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo un segmento di estremi $Q_1 \equiv (x_1,0)$ e $Q_2 \equiv (x_2,0)$ è sempre nullo
- [8] esiste almeno una curva γ che collega i punti $A \equiv (\pi/2, 0)$ e $B \equiv (\pi/4, 0)$ lungo cui il lavoro di $\mathbf{F}$ è $L = 2$.
- [9] esiste almeno una curva γ che collega due punti X_1 e X_2 del piano, lungo cui il lavoro di $\mathbf{F}$ è $L = 3$.

---

6. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Il flusso del campo

$$\mathbf{F} = (x^2y^2, xy+xz, x^2+y^2+z^2)$$

attraverso la superficie

$$\Sigma : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho \in [0,1] \\ \theta \in [0,2\pi] \end{array}$$

orientata mediante il versore $\mathbf{k}$ è $\Phi =$

---

7. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy}{1+y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (x_0, y_0 \in \mathbb{R})\,.$$

- [1] Per ogni $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy dato ammette esattamente una soluzione.
- [2] Per qualche $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy dato ammette infinite soluzioni.
- [3] Tutte le soluzioni del problema di Cauchy dato presentano un punto critico in $x_0 = 0$.
- [4] Per $(x_0,y_0) = (0,1)$, la soluzione del problema di Cauchy ha un punto di minimo in x_0.
- [5] Per $(x_0,y_0) = (0,-1)$, la soluzione del problema di Cauchy ha un punto di massimo in x_0.
- [6] Per $(x_0,y_0) = (0,1/2)$, la soluzione del problema di Cauchy ha un punto di flesso in x_0.

---

8. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Calcolare l'integrale di superficie

$$I = \iint_\Sigma \frac{xy - z}{\sqrt{x^2 + y^2 + 9xyz}} \, \mathrm{d}\sigma$$

dove

$$\Sigma : \begin{cases} x = uv^2 \\ y = u^2 v \\ z = uv \end{cases} \qquad u, v \in [1, \sqrt{2}] \, .$$

$I =$

---

9. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Determinare il disco di convergenza della serie complessa

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{z^n}{n^n} \, .$$

$D =$

---

10. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si considerino gli integrali

$$I_1 = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z(z-2)(z-4)} \qquad \text{e} \qquad I_2 = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z(z-2\,\mathrm{i})(z-4\,\mathrm{i})}$$

dove $\gamma : |z| = 3$ è orientata positivamente. Allora

$\boxed{1}$ $I_1 - I_2 = 0$	$\boxed{5}$ $I_1 + I_2 = 0$	$\boxed{9}$ $I_1 \cdot I_2 = 0$
$\boxed{2}$ $I_1 - I_2 = 2\pi\mathrm{i}$	$\boxed{6}$ $I_1 + I_2 = 1$	$\boxed{10}$ $I_1 \cdot I_2 = \mathrm{i}$
$\boxed{3}$ $I_1 - I_2 = \frac{1}{4}\pi\mathrm{i}$	$\boxed{7}$ $I_1 + I_2 = 2\mathrm{i}$	$\boxed{11}$ $I_1 \cdot I_2 = \frac{1}{16}\pi^2$
$\boxed{4}$ $I_1 - I_2 = -\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}$	$\boxed{8}$ $I_1 + I_2 = 2\pi\mathrm{i}$	$\boxed{12}$ $I_1 \cdot I_2 = -\frac{1}{4}\pi^2$.

Domande teoriche (4 punti)

1. (0.5 punti) Dare la definizione di rotore di un campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
2. (0.5 punti) Dare la definizione di polo di ordine m per una funzione complessa.
3. (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema della formula del gradiente.