

Cognome: _____

Matricola: _____

Nome: _____

Punteggio Totale: _____

Istruzioni. Segare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

Tempo. 1 ora e 20 minuti.

1. (Domanda a risposta singola, 1 punti) L'equazione del piano tangente al grafico della funzione

$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$$

nel punto $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$ è

- | | |
|--|---|
| <input type="radio"/> ① $x + y + z = 0$ | <input type="radio"/> ⑤ $x + y + z - 2 + \log 2 = 0$ |
| <input type="radio"/> ② $x + y - z = 0$ | <input checked="" type="radio"/> ⑥ $x + y - z - 2 + \log 2 = 0$ |
| <input type="radio"/> ③ $x - y + z + \log 2 = 0$ | <input type="radio"/> ⑦ $x + y - z - 2 - \log 2 = 0$ |
| <input type="radio"/> ④ $x - y - z - \log 2 = 0$ | <input type="radio"/> ⑧ $x + y - z + 2 - \log 2 = 0$. |

2. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + |xy|}.$$

Allora

- 1 f è continua in $(0, 0)$
- 2 f non è derivabile in $(0, 0)$
- 3 f possiede tutte le derivate direzionali in $(0, 0)$
- 4 f non è differenziabile in $(0, 0)$
- 5 f ha un piano tangente in $(0, 0)$ di equazione $z = 1$
- 6 f è limitata
- 7 f possiede un punto di minimo in $(0, 0)$
- 8 f possiede un punto di massimo in $(0, 0)$
- 9 f possiede solo un numero finito di punti estremanti.

3. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri la regione

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2x + 2y + 1}{x^2 + y^2} \geq 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Allora

- 1 Ω è un insieme aperto
- 2 Ω è un insieme chiuso
- 3 Ω è un insieme limitato
- 4 Ω è un insieme compatto
- 5 Ω è un insieme connesso
- 6 Ω è un insieme semplicemente connesso
- 7 una funzione continua $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ possiede necessariamente un punto di massimo
- 8 un campo vettoriale $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ irrotazionale è necessariamente conservativo.

4. (Domanda a risposta singola, 2 punti) Si consideri l'integrale doppio

$$I = \iint_{\Omega} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy$$

dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x\}$. Allora

- ① $I = +\infty$. ③ $I = 0$. ⑤ $I = 1 + \sqrt{3}$. ⑦ $I = -1 + \sqrt{3}$.
 ② $I = -\infty$. ④ $I = 1$. ⑥ $I = 1 + \sqrt{3}$. ⑧ $I = -1 - \sqrt{3}$.
-

5. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri il campo

$$\mathbf{F} = (e^y \cos(xe^y), xe^y \cos(xe^y)).$$

Allora

- 1 \mathbf{F} è irrotazionale
 2 \mathbf{F} è conservativo
 3 \mathbf{F} possiede potenziale $U(x, y) = \cos(xe^y)$
 4 \mathbf{F} non possiede funzioni potenziali
 5 il lavoro di \mathbf{F} lungo una circonferenza $x^2 + y^2 = r^2$ è sempre nullo
 6 il lavoro di \mathbf{F} lungo un segmento di estremi $P_1 \equiv (0, y_1)$ e $P_2 \equiv (0, y_2)$ è sempre nullo
 7 il lavoro di \mathbf{F} lungo un segmento di estremi $Q_1 \equiv (x_1, 0)$ e $Q_2 \equiv (x_2, 0)$ è sempre nullo
 8 esiste almeno una curva γ che collega i punti $A \equiv (\pi/2, 0)$ e $B \equiv (\pi/4, 0)$ lungo cui il lavoro di \mathbf{F} è $L = 2$.
 9 esiste almeno una curva γ che collega due punti X_1 e X_2 del piano, lungo cui il lavoro di \mathbf{F} è $L = 3$.
-

6. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Il flusso del campo

$$\mathbf{F} = (x^2y^2, xy + xz, x^2 + y^2 + z^2)$$

attraverso la superficie

$$\Sigma : \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \rho \in [0, 1] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

orientata mediante il versore \mathbf{k} è $\Phi = \pi/2$

7. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{xy}{1+y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (x_0, y_0 \in \mathbb{R}).$$

- 1 Per ogni $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy dato ammette esattamente una soluzione.
 2 Per qualche $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy dato ammette infinite soluzioni.
 3 Tutte le soluzioni del problema di Cauchy dato presentano un punto critico in $x_0 = 0$.
 4 Per $(x_0, y_0) = (0, 1)$, la soluzione del problema di Cauchy ha un punto di minimo in x_0 .
 5 Per $(x_0, y_0) = (0, -1)$, la soluzione del problema di Cauchy ha un punto di massimo in x_0 .
 6 Per $(x_0, y_0) = (0, 1/2)$, la soluzione del problema di Cauchy ha un punto di flesso in x_0 .
-

8. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Calcolare l'integrale di superficie

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{xy - z}{\sqrt{x^2 + y^2 + 9xyz}} d\sigma$$

dove

$$\Sigma : \begin{cases} x = uv^2 \\ y = vu^2 \\ z = uv \end{cases} \quad u, v \in [1, \sqrt{2}].$$

$$I = 5/16.$$

9. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Determinare il disco di convergenza della serie complessa

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{z^n}{n^n}.$$

$$D = \mathbb{C}$$

10. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si considerino gli integrali

$$I_1 = \int_{\gamma} \frac{dz}{z(z-2)(z-4)} \quad \text{e} \quad I_2 = \int_{\gamma} \frac{dz}{z(z-2i)(z-4i)}$$

dove $\gamma : |z| = 3$ è orientata positivamente. Allora

1 $I_1 - I_2 = 0$

5 $I_1 + I_2 = 0$

9 $I_1 \cdot I_2 = 0$

2 $I_1 - I_2 = 2\pi i$

6 $I_1 + I_2 = 1$

10 $I_1 \cdot I_2 = i$

3 $I_1 - I_2 = \frac{1}{4}\pi i$

7 $I_1 + I_2 = 2i$

11 $I_1 \cdot I_2 = \frac{1}{16}\pi^2$

4 $I_1 - I_2 = -\frac{1}{2}\pi i$

8 $I_1 + I_2 = 2\pi i$

12 $I_1 \cdot I_2 = -\frac{1}{4}\pi^2$

DOMANDE TEORICHE (4 punti)

- (0.5 punti) Dare la definizione di rotore di un campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
- (0.5 punti) Dare la definizione di polo di ordine m per una funzione complessa.
- (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema della formula del gradiente.