POLITECNICO DI MILANO – INGEGNERIA INDUSTRIALE E DELL'INFORMAZIONE

ANALISI MATEMATICA II — *Terzo Appello – 1° Luglio 2022*

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________ **Punteggio Totale:** ____________________

Istruzioni. *Segare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora e 20 minuti.*

---

1. (Domanda a risposta singola, 2 punti) Sia $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ un punto della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. Allora la derivata direzionale della funzione

$$f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$$

nel punto $\mathbf{x}_0$ lungo il versore $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ è

① $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = 0$

② $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = 1$

③ $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \log 2$

④ $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \log \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

⑤ $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = x_0 - y_0$

⑥ $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = x_0 - \sqrt{3}\, y_0$

⑦ $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = x_0 + \sqrt{3}\, y_0$

⑧ $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \dfrac{x_0 - \sqrt{3}\, y_0}{2}$.

---

2. (Domanda a risposta multipla, 2 punti) La funzione

$$f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$$

[1] è continua in tutto $\mathbb{R}^2$

[2] è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$

[3] è di classe $\mathcal{C}^1$ in tutto $\mathbb{R}^2$

[4] è illimitata

[5] possiede un punto di massimo in $(0,0)$

[6] possiede un punto di minimo in $(0,0)$

[7] possiede un punto di sella in $(0,0)$

[8] possiede infiniti punti di massimo

[9] possiede infiniti punti di minimo

---

3. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri la regione

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \log(1 + x + y + xy) = \log(1+x) + \log(1+y)\right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Allora

[1] Ω è un insieme aperto

[2] Ω è un insieme chiuso

[3] Ω è un insieme limitato

[4] Ω è un insieme compatto

[5] Ω è un insieme connesso

[6] Ω è un insieme semplicemente connesso

[7] una funzione continua $f : \Omega \to \mathbb{R}$ possiede necessariamente un punto di massimo

[8] un campo vettoriale $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}$ irrotazionale è necessariamente conservativo.

---

4. (Domanda a risposta singola, 2 punti) Si consideri l'integrale triplo

$$I = \iiint_\Omega (x^2+y^2+x)z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

dove $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 \le 1\,,\ 0 \le z \le 1\}$. Allora

① $I=0$	③ $I=\pi$	⑤ $I=\pi/2$	⑦ $I=\pi/6$	⑨ $I=2\pi/3$
② $I=1$	④ $I=2\pi$	⑥ $I=\pi/4$	⑧ $I=\pi/8$	⑩ $I=3\pi/2$.

---

5. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = (2xy\ \cos(x^2y), x^2\ \cos(x^2y)).$$

Allora

- [1] $\mathbf{F}$ è irrotazionale
- [2] $\mathbf{F}$ è conservativo
- [3] $\mathbf{F}$ possiede potenziale $U(x,y) = x\cos(x^2y)$
- [4] $\mathbf{F}$ non possiede funzioni potenziali
- [5] il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo una circonferenza $x^2+y^2=r^2$ è sempre nullo
- [6] il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo un segmento di estremi $P_1 \equiv (0,y_1)$ e $P_2 \equiv (0,y_2)$ è sempre nullo
- [7] il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo un segmento di estremi $Q_1 \equiv (x_1,0)$ e $Q_2 \equiv (x_2,0)$ è sempre nullo
- [8] il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo una qualunque curva che collega i punti $A \equiv (-x_0,y_0)$ e $B \equiv (x_0,y_0)$ è sempre nullo
- [9] esiste almeno una curva γ che collega due punti X_1 e X_2 del piano, lungo cui il lavoro di $\mathbf{F}$ è $L=\pi$.

---

6. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Determinare gli eventuali valori del parametro reale α per i quali è nullo il flusso del campo

$$\mathbf{F} = (\alpha x + \mathrm{e}^{yz}, -2y + \mathrm{e}^{xz}, \alpha^2 z + \mathrm{e}^{xy})$$

attraverso la sfera $x^2+y^2+z^2=1$, orientata positivamente.

$\alpha =$

---

7. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy^2}{1+y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- [1] non ammette soluzioni
- [2] ammette infinite soluzioni
- [3] ammette esattamente una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$
- [4] ammette esattamente una soluzione definita solo su $(-\sqrt[4]{2}, +\infty)$
- [5] ammette esattamente una soluzione che presenta un punto di minimo in $x_0 = 0$
- [6] ammette esattamente una soluzione che presenta un punto di massimo in $x_0 = 0$
- [7] ammette esattamente una soluzione illimitata per $x \to +\infty$
- [8] ammette esattamente una soluzione dispari.

---

8. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Calcolare l'area della superficie

$$\Sigma : \begin{cases} x = \cos(uv) \\ y = \sin(uv) \\ z = u^2 - v^2 \end{cases} \qquad u, v \in [0,1]\,.$$

$\mathcal{A} =$

---

9. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Determinare l'anello di convergenza della serie di Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{(|n|+1)\,2^{|n|}}\,.$$

$A =$

---

10. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si considerino gli integrali

$$I_1 = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2(z-2)^2} \qquad \text{e} \qquad I_2 = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-\mathrm{i})^2(z-3\,\mathrm{i})^2}$$

dove $\gamma \,:\, |z| = \sqrt{2}$ è orientata positivamente. Allora

$\boxed{1}$ $I_1 - I_2 = 0$	$\boxed{5}$ $I_1 + I_2 = 0$	$\boxed{9}$ $I_1/I_2 = \pi$
$\boxed{2}$ $I_1 - \mathrm{i}\,I_2 = \mathrm{i}$	$\boxed{6}$ $I_1 + \mathrm{i}\,I_2 = 0$	$\boxed{10}$ $I_1/I_2 = -\pi$
$\boxed{3}$ $I_1 - I_2 = \pi$	$\boxed{7}$ $I_1 + I_2 = \mathrm{i}$	$\boxed{11}$ $I_1/I_2 = \mathrm{i}$
$\boxed{4}$ $I_1 - \mathrm{i}\,I_2 = \pi\mathrm{i}$	$\boxed{8}$ $I_1 + \mathrm{i}\,I_2 = 1$	$\boxed{12}$ $I_1/I_2 = -\mathrm{i}.$

Domande teoriche (4 punti)

1. (0.5 punti) Dare la definizione di integrale di linea di prima specie.
2. (0.5 punti) Dare la definizione di singolarità essenziale per una funzione complessa.
3. (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema del lavoro di un campo conservativo.