ANALISI MATEMATICA II *Quarto Appello – 29 Agosto 2022*

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________ **Punteggio Totale:** ____________________

Istruzioni. *Segare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora e 20 minuti.*

---

1. (Domanda a risposta multipla, 2 punti) La funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\log(x^2+y^2) & (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha & (x,y)=(0,0)\end{cases}\qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

- [x] 1 è definita su tutto $\mathbb{R}^2$
- [ ] 2 è definita solo sul disco $x^2+y^2\leq 1$
- [ ] 3 è definita solo su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$
- [x] 4 si annulla in infiniti punti
- [ ] 5 non si annulla mai
- [ ] 6 è continua in $(0,0)$ per ogni α
- [ ] 7 è continua in $(0,0)$ solo per $\alpha=0$
- [x] 8 non è mai continua in $(0,0)$.

---

2. (Domanda a risposta multipla, 2 punti) La funzione

$$f(x,y)=\sin(xy)$$

- [x] 1 è limitata
- [x] 2 ammette $(0,0)$ come punto punto critico
- [ ] 3 ammette $(0,0)$ come punto punto di massimo
- [ ] 4 ammette $(0,0)$ come punto punto di minimo
- [x] 5 ammette $(0,0)$ come punto punto di sella
- [x] 6 possiede infiniti punti di massimo che si dispongono lungo iperboli equilatere
- [x] 7 possiede infiniti punti di minimo che si dispongono lungo iperboli equilatere.

---

3. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Sia $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ strettamente monotòna e senza punti a tangente orizzontale. Allora la trasformazione $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definita da

$$F(x,y)=(f(x)\cos y, f(x)\sin y)$$

- [x] 1 è regolare su tutto $\mathbb{R}^2$
- [ ] 2 è regolare solo su un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}^2$
- [x] 3 è localmente invertibile su tutto $\mathbb{R}^2$
- [ ] 4 è localmente invertibile solo su un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}^2$
- [ ] 5 è iniettiva
- [ ] 6 è suriettiva
- [ ] 7 è globalmente invertibile.

---

4. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) L'integrale triplo

$$I=\iiint_\Omega \frac{z}{x^2+y^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

dove $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2\leq 2\,,\ 0\leq z\leq\sqrt{2}\}$, vale $I=\pi\log 3$.

---

5. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Il lavoro del campo vettoriale

$$\mathbf{F} = (x\,\cos y, y\,\sin x)$$

lungo il bordo γ, orientato positivamente, della regione

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\,,\; x \geq 0\,,\; y \geq 0\}\,,$$

è $L_\gamma(\mathbf{F}) = 2\pi(\pi - 1)$.

---

6. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Sia Σ il bordo di una regione $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ xyz-semplice. Se il flusso del campo

$$\mathbf{F} = (x\,\cos^2 z, y\,\sin^2 z, z + \sin x \cos y)$$

attraverso la superficie Σ, orientata positivamente, è $\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = 4$, allora il volume della regione Ω è $V(\Omega) = 2$.

---

7. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x.$$

Allora

$\boxed{1}$ l'equazione non ammette soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$

$\boxed{2}$ l'equazione ammette esattamente una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$

$\boxed{3}$ l'insieme delle soluzioni forma uno spazio vettoriale di dimensione 2

$\boxed{4}$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea forma uno spazio vettoriale di dimensione 1

$\boxed{5}$ ✓ esistono infinite soluzioni che sono limitate per $x \to -\infty$

$\boxed{6}$ ✓ esistono infinite soluzioni che ammettono un punto di massimo in $x_0 = 0$

$\boxed{7}$ ✓ esistono infinite soluzioni che ammettono un punto di minimo in $x_0 = 0$

$\boxed{8}$ ✓ esiste un'unica soluzione che possiede un punto di flesso a tangente orizzontale in $x_0 = 0$.

---

8. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri la superficie

$$\Sigma : \begin{cases} x = \cos(u^2 - v^2) \\ y = \sin(u^2 - v^2) \\ z = uv \end{cases} \qquad (u,v) \in \Omega$$

dove $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, u^2 + v^2 \leq 1\}$. Allora, la superficie Σ

$\boxed{1}$ è regolare

$\boxed{2}$ ✓ possiede almeno un punto singolare

$\boxed{3}$ possiede vettore normale sempre non nullo

$\boxed{4}$ ha area $\mathcal{A}(\Sigma) = 1$

$\boxed{5}$ ✓ ha area $\mathcal{A}(\Sigma) = \pi$

$\boxed{6}$ ha area $\mathcal{A}(\Sigma) = 2\pi$.

---

9. (Domanda a risposta multipla, 2 punti) La funzione complessa definita dalla serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 1}{2^n + 1}\, z^n$$

$\boxed{1}$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$

$\boxed{2}$ è olomorfa solo su un intervallo aperto di $\mathbb{R}$

$\boxed{3}$ ✓ è olomorfa su un disco aperto di $\mathbb{C}$

$\boxed{4}$ ✓ è olomorfa sul disco aperto di centro $z_0 = 0$ e raggio $r = 1$

$\boxed{5}$ è olomorfa sul disco aperto di centro $z_0 = 0$ e raggio $r = 3$

$\boxed{6}$ è olomorfa solo su un anello aperto di $\mathbb{C}$

$\boxed{7}$ non è mai olomorfa.

10. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) L'integrale complesso

$$I = \int_\gamma \frac{e^z}{z(z+2i)}\, dz\,,$$

dove $\gamma\,:\,|z+1| = 2$ è orientata positivamente, vale $I = \pi$.

Domande teoriche (4 punti)

1. (0.5 punti) Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione di più variabili.
2. (0.5 punti) Dare la definizione di residuo di una funzione complessa in un punto z_0 .
3. (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema della derivata del prodotto scalare di due funzioni vettoriali.