Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora.*

Questionario (26 punti)

1. (Domanda a risposta multipla, 5 punti) La funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^4+y^4}}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[1] è continua in $(0,0)$

[2] è derivabile in $(0,0)$

[3] è derivabile in $(0,0)$ lungo ogni versore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$

[4] è differenziabile in $(0,0)$

[5] ammette $(0,0)$ come punto critico

[6] ammette $(0,0)$ come punto di minimo assoluto

[7] ammette $(0,0)$ come punto di massimo assoluto

[8] ammette $(0,0)$ come punto di sella

[9] non si annulla mai.

---

2. (Domanda a risposta multipla, 4 punti) La funzione $f(x,y) = x^2y - xy^2 + xy$ possiede

[1] nessun punto critico

[2] tre punti critici

[3] quattro punti critici

[4] almeno un punto di massimo

[5] almeno un punto di minimo

[6] solo punti di sella

[7] due punti di sella, un punto di massimo e un punto di minimo

[8] tre punti di sella e un punto di minimo

[9] tre punti di sella e un punto di massimo.

---

3. (Domanda a risposta singola, 3 punti) Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione definita da

$$F(x,y) = (x^2+xy+y^2, x^2-xy+y^2).$$

Siano $\mathbf{x}_0 = (1,-1)$ e $\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. La derivata direzionale di f lungo $\mathbf{v}$ in $\mathbf{x}_0$ è data da

① $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = 0$

② $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = 1$

③ $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = -1$

④ $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1,1)$

⑤ $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1,3)$

⑥ $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(3,1)$

⑦ $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}(-1,3)$

⑧ $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}(3,-1)$

⑨ non esiste.

---

4. (Domanda a risposta singola, 4 punti) Sia g la funzione definita implicitamente dall'equazione

$$y - x\mathrm{e}^{x+y} = 0$$

in un opportuno intorno del punto $(0,0)$. Allora, lo sviluppo di Taylor del secondo ordine della funzione g nel punto $x_0 = 0$ è, per $x \to 0$:

① $g(x) = x - x^2 + o(x)^2$

② $g(x) = x + x^2 + o(x)^2$

③ $g(x) = -x - x^2 + o(x)^2$

④ $g(x) = -x + 2x^2 + o(x)^2$

⑤ $g(x) = 2x - x^2 + o(x)^2$

⑥ $g(x) = x + 2x^2 + o(x)^2$

⑦ $g(x) = -x + 4x^2 + o(x)^2$

⑧ $g(x) = x + 4x^2 + o(x)^2$

⑨ $g(x) = 2x + 4x^2 + o(x)^2$.

---

5. (Domanda a risposta aperta, 4 punti) L'integrale triplo

$$I = \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

dove $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$, vale $I =$ ....

---

6. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 2\,,\ -x \leq y \leq x\}$ la lamina con densità superficiale $\delta(x,y) = x^2+y^2$. Sia M la massa totale di Ω e sia G il baricentro di Ω. Allora

1 $M = -\dfrac{1}{2}$	4 $M = \dfrac{\pi}{2}$	7 $G \equiv \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$	10 $G \equiv \left(\dfrac{16}{5\pi}, 0\right)$
2 $M = \dfrac{1}{4}$	5 $M = \dfrac{\pi}{4}$	8 $G \equiv \left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$	11 $G \equiv \left(0, \dfrac{16}{5\pi}\right)$
3 $M = \dfrac{1}{8}$	6 $M = \dfrac{\pi}{8}$	9 $G \equiv \left(-\dfrac{16}{5\pi}, \dfrac{16}{5\pi}\right)$	12 $G \equiv \left(0, \dfrac{5\pi}{16}\right)$

---

7. (Domanda a risposta singola, 3 punti) L'integrale di linea

$$I = \int_\gamma xyz \,\mathrm{d}s\,, \quad \text{dove} \quad \gamma : \begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \\ z = \theta \end{cases} \qquad \theta \in [0,\pi]\,,$$

vale

1 -1	3 $-\pi$	5 $-\sqrt{5}$	7 $-\sqrt{5}\,\pi$	9 0
2 1	4 π	6 $\sqrt{5}$	8 $\sqrt{5}\,\pi$	10 $+\infty$.

Domande teoriche (5 punti)

1. (Domanda a risposta aperta, 1 punto) Enunciare il teorema della formula del gradiente.

2. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine di una funzione $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ in un punto $\mathbf{x}_0 \in \Omega$:

3. (Domanda a risposta multipla, 2 punti) Sia γ una curva parametrica.

1 Se γ è piana, allora è regolare
2 Se γ è regolare, allora è biregolare
3 Se γ è regolare, allora ammette retta tangente in ogni punto
4 Se γ è biregolare, allora è regolare
5 Se γ è biregolare, allora è piana
6 Se γ è biregolare, allora è derivabile due volte
7 Se γ è biregolare, allora ammette una terna intrinseca in ogni punto
8 Se γ è biregolare, allora è contenuta nel proprio piano osculatore.
9 Se γ è di classe $\mathcal{C}^1$, allora è rettificabile.
10 Se γ è rettificabile, allora è piana.