

Cognome: _____

Matricola: _____

Nome: _____

Punteggio Totale: _____

Istruzioni. Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

Tempo. 1 ora.

QUESTIONARIO (26 punti)

1. (Domanda a risposta multipla, 5 punti) La funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^4 + y^4}}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- | | |
|---|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> è continua in $(0, 0)$ | <input checked="" type="checkbox"/> ammette $(0, 0)$ come punto di minimo assoluto |
| <input checked="" type="checkbox"/> è derivabile in $(0, 0)$ | <input type="checkbox"/> ammette $(0, 0)$ come punto di massimo assoluto |
| <input checked="" type="checkbox"/> è derivabile in $(0, 0)$ lungo ogni versore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ | <input type="checkbox"/> ammette $(0, 0)$ come punto di sella |
| <input checked="" type="checkbox"/> è differenziabile in $(0, 0)$ | <input type="checkbox"/> non si annulla mai. |
| <input checked="" type="checkbox"/> ammette $(0, 0)$ come punto critico | |

2. (Domanda a risposta multipla, 4 punti) La funzione $f(x, y) = x^2y - xy^2 + xy$ possiede

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> nessun punto critico | <input type="checkbox"/> solo punti di sella |
| <input type="checkbox"/> tre punti critici | <input type="checkbox"/> due punti di sella, un punto di massimo e un punto di minimo |
| <input checked="" type="checkbox"/> quattro punti critici | <input checked="" type="checkbox"/> tre punti di sella e un punto di minimo |
| <input type="checkbox"/> almeno un punto di massimo | <input type="checkbox"/> tre punti di sella e un punto di massimo. |
| <input checked="" type="checkbox"/> almeno un punto di minimo | |

3. (Domanda a risposta singola, 3 punti) Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione definita da

$$F(x, y) = (x^2 + xy + y^2, x^2 - xy + y^2).$$

Siano $\mathbf{x}_0 = (1, -1)$ e $\mathbf{v} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. La derivata direzionale di f lungo \mathbf{v} in \mathbf{x}_0 è data da

- | | | |
|---|---|---|
| <input type="checkbox"/> $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = 0$ | <input type="checkbox"/> $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} (1, 1)$ | <input type="checkbox"/> $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} (-1, 3)$ |
| <input type="checkbox"/> $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = 1$ | <input checked="" type="checkbox"/> $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} (1, 3)$ | <input type="checkbox"/> $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} (3, -1)$ |
| <input type="checkbox"/> $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = -1$ | <input type="checkbox"/> $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} (3, 1)$ | <input type="checkbox"/> non esiste. |

4. (Domanda a risposta singola, 4 punti) Sia g la funzione definita implicitamente dall'equazione

$$y - xe^{x+y} = 0$$

in un opportuno intorno del punto $(0, 0)$. Allora, lo sviluppo di Taylor del secondo ordine della funzione g nel punto $x_0 = 0$ è, per $x \rightarrow 0$:

- | | | |
|---|--|--|
| <input type="checkbox"/> $g(x) = x - x^2 + o(x)^2$ | <input type="checkbox"/> $g(x) = -x + 2x^2 + o(x)^2$ | <input type="checkbox"/> $g(x) = -x + 4x^2 + o(x)^2$ |
| <input type="checkbox"/> $g(x) = x + x^2 + o(x)^2$ | <input type="checkbox"/> $g(x) = 2x - x^2 + o(x)^2$ | <input type="checkbox"/> $g(x) = x + 4x^2 + o(x)^2$ |
| <input type="checkbox"/> $g(x) = -x - x^2 + o(x)^2$ | <input checked="" type="checkbox"/> $g(x) = x + 2x^2 + o(x)^2$ | <input type="checkbox"/> $g(x) = 2x + 4x^2 + o(x)^2$. |

5. (Domanda a risposta aperta, 4 punti) L'integrale triplo

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

dove $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, vale $I = \frac{5}{6}\pi$.

6. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, -x \leq y \leq x\}$ la lamina con densità superficiale $\delta(x, y) = x^2 + y^2$. Sia M la massa totale di Ω e sia G il baricentro di Ω . Allora

- | | | | | | | | |
|----------------------------|--------------------|---------------------------------------|---------------------|----------------------------|---|--|--|
| <input type="checkbox"/> 1 | $M = -\frac{1}{2}$ | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | $M = \frac{\pi}{2}$ | <input type="checkbox"/> 7 | $G \equiv \left(0, \frac{1}{2}\right)$ | <input checked="" type="checkbox"/> 10 | $G \equiv \left(\frac{16}{5\pi}, 0\right)$ |
| <input type="checkbox"/> 2 | $M = \frac{1}{4}$ | <input type="checkbox"/> 5 | $M = \frac{\pi}{4}$ | <input type="checkbox"/> 8 | $G \equiv \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ | <input type="checkbox"/> 11 | $G \equiv \left(0, \frac{16}{5\pi}\right)$ |
| <input type="checkbox"/> 3 | $M = \frac{1}{8}$ | <input type="checkbox"/> 6 | $M = \frac{\pi}{8}$ | <input type="checkbox"/> 9 | $G \equiv \left(-\frac{16}{5\pi}, \frac{16}{5\pi}\right)$ | <input type="checkbox"/> 12 | $G \equiv \left(0, \frac{5\pi}{16}\right)$ |

7. (Domanda a risposta singola, 3 punti) L'integrale di linea

$$I = \int_{\gamma} xyz \, ds, \quad \text{dove} \quad \gamma : \begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \\ z = \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, \pi],$$

vale

- | | | | | | | | | | |
|----------------------------|----|----------------------------|--------|----------------------------|-------------|---------------------------------------|----------------|-----------------------------|-------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | -1 | <input type="checkbox"/> 3 | $-\pi$ | <input type="checkbox"/> 5 | $-\sqrt{5}$ | <input checked="" type="checkbox"/> 7 | $-\sqrt{5}\pi$ | <input type="checkbox"/> 9 | 0 |
| <input type="checkbox"/> 2 | 1 | <input type="checkbox"/> 4 | π | <input type="checkbox"/> 6 | $\sqrt{5}$ | <input type="checkbox"/> 8 | $\sqrt{5}\pi$ | <input type="checkbox"/> 10 | $+\infty$. |

DOMANDE TEORICHE (5 punti)

1. (Domanda a risposta aperta, 1 punto) Enunciare il teorema della formula del gradiente.

2. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine di una funzione $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ in un punto $\mathbf{x}_0 \in \Omega$:

3. (Domanda a risposta multipla, 2 punti) Sia γ una curva parametrica.

- | | | | |
|---------------------------------------|---|---------------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> 1 | Se γ è piana, allora è regolare | <input checked="" type="checkbox"/> 7 | Se γ è biregolare, allora ammette una terna intrinseca in ogni punto |
| <input type="checkbox"/> 2 | Se γ è regolare, allora è biregolare | <input type="checkbox"/> 8 | Se γ è biregolare, allora è contenuta nel proprio piano osculatore. |
| <input checked="" type="checkbox"/> 3 | Se γ è regolare, allora ammette retta tangente in ogni punto | <input checked="" type="checkbox"/> 9 | Se γ è di classe \mathcal{C}^1 , allora è rettificabile. |
| <input checked="" type="checkbox"/> 4 | Se γ è biregolare, allora è regolare | <input type="checkbox"/> 10 | Se γ è rettificabile, allora è piana. |
| <input type="checkbox"/> 5 | Se γ è biregolare, allora è piana | | |
| <input checked="" type="checkbox"/> 6 | Se γ è biregolare, allora è derivabile due volte | | |