

Cognome: _____

Matricola: _____

Nome: _____

Punteggio Totale: _____

Istruzioni. Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

Tempo. 1 ora e 15 minuti.

QUESTIONARIO (27 punti)

1. (Domanda a risposta aperta, 4 punti) Calcolare l'integrale di linea $I = \int_{\gamma} (xy^2 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy$ dove γ è il bordo, orientato positivamente, della regione $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\}$.

$I = \dots\dots\dots$

2. (Domanda a risposta multipla, 4 punti) Il campo vettoriale $\mathbf{F} = (\sin(yz), xz \cos(yz), xy \cos(yz))$

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> 1 è definito su un insieme semplicemente connesso | <input type="checkbox"/> 6 ammette infinite funzioni potenziali |
| <input type="checkbox"/> 2 non è irrotazionale | <input type="checkbox"/> 7 compie un lavoro nullo lungo ogni curva chiusa |
| <input type="checkbox"/> 3 è conservativo | <input type="checkbox"/> 8 compie un lavoro nullo lungo ogni curva |
| <input type="checkbox"/> 4 non ammette funzioni potenziali | <input type="checkbox"/> 9 compie un lavoro nullo lungo ogni curva contenuta nel piano yz |
| <input type="checkbox"/> 5 ammette esattamente una funzione potenziale | |

3. (Domanda a risposta aperta, 4 punti) Determinare il raggio della sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, orientata positivamente, in modo che il flusso del campo $\mathbf{F} = (x^2 + xy, y^2 - xy - 2yz, z^2 - xz - 3yz + z)$ sia $\Phi_S(\mathbf{F}) = 36\pi$.

$r = \dots\dots\dots$

4. (Domanda a risposta singola, 4 punti) L'area della superficie

$$\Sigma : \begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \quad u^2 + v^2 \leq 4$$

è

- | | | |
|--|--|--|
| <input type="radio"/> ① $\mathcal{A}(\Sigma) = -\pi$ | <input type="radio"/> ⑤ $\mathcal{A}(\Sigma) = \frac{15}{13}\pi$ | <input type="radio"/> ⑧ $\mathcal{A}(\Sigma) = \frac{1}{3}(\pi + 1)$ |
| <input type="radio"/> ② $\mathcal{A}(\Sigma) = 0$ | <input type="radio"/> ⑥ $\mathcal{A}(\Sigma) = \frac{52}{3}\pi$ | <input type="radio"/> ⑨ $\mathcal{A}(\Sigma) = \frac{5}{3}(\pi - 1)$ |
| <input type="radio"/> ③ $\mathcal{A}(\Sigma) = 2\pi$ | <input type="radio"/> ⑦ $\mathcal{A}(\Sigma) = \frac{75}{3}\pi$ | <input type="radio"/> ⑩ $\mathcal{A}(\Sigma) = +\infty$ |
| <input type="radio"/> ④ $\mathcal{A}(\Sigma) = \frac{5}{3}\pi$ | | |

5. (Domanda a risposta singola, 3 punti) Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{x+y(x)} \\ y(0) = -\log 2 \end{cases}$$

- | | |
|---|--|
| <input type="radio"/> ① non ammette soluzioni | <input type="radio"/> ⑥ ammette solo una soluzione su $(-\infty, -\log 2]$ |
| <input type="radio"/> ② ammette infinite soluzioni | <input type="radio"/> ⑦ ammette solo una soluzione su $(-\log 2, 0)$ |
| <input type="radio"/> ③ ammette solo due soluzioni | <input type="radio"/> ⑧ ammette solo una soluzione su $(0, \log 3)$ |
| <input type="radio"/> ④ ammette solo una soluzione definita su tutto \mathbb{R} | <input type="radio"/> ⑨ ammette solo una soluzione su $(\log 3, +\infty)$ |
| <input type="radio"/> ⑤ ammette solo una soluzione su $(-\infty, -\log 2)$ | <input type="radio"/> ⑩ ammette solo una soluzione su $(-\infty, \log 3)$ |

6. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri la serie di potenze $f(x) = \sum_{n \geq 0} (3^n - 2^n) \frac{x^n}{n!}$ e sia r il suo raggio di convergenza. Allora

1 $r = 0$

4 $f(x) = e^x(e^{2x} - 1)$

7 $f(x) = e^{3x} \cos 2x$

2 $r = 1$

5 $f(x) = e^{2x}(e^x - 1)$

8 $f(x) = e^{3x} \sin 2x$

3 $r = +\infty$

6 $f(x) = e^{2x} - e^{3x}$

9 $f(x) = e^{3x} \cos 2x - e^{3x} \sin 2x$

7. (Domanda a risposta aperta, 5 punti) Calcolare l'integrale

$$I = \int_{\gamma} \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2} dz$$

dove la curva $\gamma : |z - 1 - i| = 2$ è orientata positivamente.

$I = \dots\dots\dots$

DOMANDE TEORICHE (6 punti)

1. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Dare la definizione di campo conservativo.

2. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Enunciare il teorema integrale di Cauchy per le funzioni olomorfe.

3. (Domanda a risposta multipla, 2 punti) Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, e sia $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora l'equazione differenziale $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = q(x)$

1 può non ammettere soluzioni

2 può ammettere una ed una sola soluzione

3 può ammettere esattamente due soluzioni

4 ammette sempre esattamente ∞^1 soluzioni

5 ammette sempre esattamente ∞^2 soluzioni

6 può ammettere soluzioni solo su $(-1, 1)$

7 può ammettere soluzioni solo su $(0, +\infty)$

8 ammette ∞^1 soluzioni con $y(0) = 0$

9 ammette una sola soluzione con $y(0) = 0$

10 ammette ∞^1 soluzioni con $y'(0) = 0$

11 ammette una sola soluzione con $y'(0) = 0$

12 ammette ∞^1 soluzioni con $y(0) = y'(0)$

13 ammette una sola soluzione con $y(0) = y'(0)$

14 può non ammettere soluzioni con $y(0) = y'(0)$

15 può non ammettere soluzioni con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$

16 ammette esattamente una soluzione con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$

17 ammette infinite soluzioni con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$

18 ammette sempre $y(x) = q(x)$ come soluzione