

Cognome: _____

Matricola: _____

Nome: _____

Punteggio Totale: _____

Istruzioni. Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

Tempo. 1 ora e 30 minuti.

QUESTIONARIO (27 punti)

1. (Domanda a risposta multipla, 4 punti) Sia $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^x$, $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$, $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

- | | | |
|--|--|--|
| <input type="checkbox"/> 1 f è differenziabile in \mathbf{x}_0 | <input type="checkbox"/> 7 f possiede un punto di massimo su ogni compatto | <input type="checkbox"/> 10 $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \sqrt{2}$ |
| <input type="checkbox"/> 2 f non possiede punti critici | <input type="checkbox"/> 8 f possiede un punto di minimo su ogni compatto | <input type="checkbox"/> 11 $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = e$ |
| <input type="checkbox"/> 3 $(0, 0)$ è un punto di massimo | <input type="checkbox"/> 9 f possiede un punto di sella su ogni compatto | <input type="checkbox"/> 12 $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = 3\sqrt{2}e$ |
| <input type="checkbox"/> 4 $(0, 0)$ è un punto di minimo | | <input type="checkbox"/> 13 $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = 3\sqrt{2}\pi$ |
| <input type="checkbox"/> 5 $(2, 0)$ è un punto di sella | | <input type="checkbox"/> 14 $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \sqrt{2}e\pi$ |
| <input type="checkbox"/> 6 $(-2, 0)$ è un punto di sella | | |

2. (Domanda a risposta singola, 3 punti) L'integrale di linea

$$I = \int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2 + z} ds, \quad \text{dove} \quad \gamma : \begin{cases} x = \cos 2\theta \\ y = \sin 2\theta \\ z = \theta^2 \end{cases} \quad \theta \in [0, \pi],$$

vale

- | | | | | |
|------------------------------|---------------------------------------|--|---|-----------------------------------|
| <input type="radio"/> ① -1 | <input type="radio"/> ③ $\pi - \pi^3$ | <input type="radio"/> ⑤ $\pi - \frac{1}{3}\pi^3$ | <input type="radio"/> ⑦ $2\pi - \frac{2}{3}\pi^3$ | <input type="radio"/> ⑨ 0 |
| <input type="radio"/> ② 1 | <input type="radio"/> ④ $\pi + \pi^3$ | <input type="radio"/> ⑥ $\pi + \frac{1}{3}\pi^3$ | <input type="radio"/> ⑧ $2\pi + \frac{2}{3}\pi^3$ | <input type="radio"/> ⑩ $+\infty$ |

3. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Calcolare l'integrale di linea $I = \int_{\gamma} (xy^2 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy$ dove γ è il bordo, orientato positivamente, della regione $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\}$.

$I = \dots\dots\dots$

4. (Domanda a risposta multipla, 4 punti) Il campo vettoriale $\mathbf{F} = (\sin(yz), xz \cos(yz), xy \cos(yz))$

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> 1 è definito su un insieme semplicemente connesso | <input type="checkbox"/> 6 ammette infinite funzioni potenziali |
| <input type="checkbox"/> 2 non è irrotazionale | <input type="checkbox"/> 7 compie un lavoro nullo lungo ogni curva chiusa |
| <input type="checkbox"/> 3 è conservativo | <input type="checkbox"/> 8 compie un lavoro nullo lungo ogni curva |
| <input type="checkbox"/> 4 non ammette funzioni potenziali | <input type="checkbox"/> 9 compie un lavoro nullo lungo ogni curva contenuta nel piano yz |
| <input type="checkbox"/> 5 ammette esattamente una funzione potenziale | |

5. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Determinare il raggio della sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, orientata positivamente, in modo che il flusso del campo $\mathbf{F} = (x^2 + xy, y^2 - xy - 2yz, z^2 - xz - 3yz + z)$ sia $\Phi_S(\mathbf{F}) = 36\pi$.

$r = \dots\dots\dots$

6. (Domanda a risposta singola, 3 punti) Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{x+y(x)} \\ y(0) = -\log 2 \end{cases}$$

- | | |
|---|--|
| ① non ammette soluzioni | ⑥ ammette solo una soluzione su $(-\infty, -\log 2]$ |
| ② ammette infinite soluzioni | ⑦ ammette solo una soluzione su $(-\log 2, 0)$ |
| ③ ammette solo due soluzioni | ⑧ ammette solo una soluzione su $(0, \log 3)$ |
| ④ ammette solo una soluzione definita su tutto \mathbb{R} | ⑨ ammette solo una soluzione su $(\log 3, +\infty)$ |
| ⑤ ammette solo una soluzione su $(-\infty, -\log 2)$ | ⑩ ammette solo una soluzione su $(-\infty, \log 3)$ |

7. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri la serie di potenze $f(x) = \sum_{n \geq 0} (3^n - 2^n) \frac{x^n}{n!}$ e sia r il suo raggio di convergenza. Allora

- | | | |
|-----------------|----------------------------|--|
| ① $r = 0$ | ④ $f(x) = e^x(e^{2x} - 1)$ | ⑦ $f(x) = e^{3x} \cos 2x$ |
| ② $r = 1$ | ⑤ $f(x) = e^{2x}(e^x - 1)$ | ⑧ $f(x) = e^{3x} \sin 2x$ |
| ③ $r = +\infty$ | ⑥ $f(x) = e^{2x} - e^{3x}$ | ⑨ $f(x) = e^{3x} \cos 2x - e^{3x} \sin 2x$ |

8. (Domanda a risposta aperta, 4 punti) Calcolare l'integrale

$$I = \int_{\gamma} \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2} dz$$

dove la curva $\gamma : |z - 1 - i| = 2$ è orientata positivamente.

$I = \dots\dots\dots$

DOMANDE TEORICHE (6 punti)

1. (Domanda a risposta aperta, 1.5 punti) Dare la definizione di funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

2. (Domanda a risposta aperta, 1.5 punti) Dare la definizione di campo conservativo.

3. (Domanda a risposta aperta, 1 punto) Enunciare il teorema integrale di Cauchy per le funzioni olomorfe.

4. (Domanda a risposta multipla, 2 punti) Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, e sia $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora l'equazione differenziale $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = q(x)$

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> 1 può non ammettere soluzioni | <input type="checkbox"/> 12 ammette ∞^1 soluzioni con $y(0) = y'(0)$ |
| <input type="checkbox"/> 2 può ammettere una ed una sola soluzione | <input type="checkbox"/> 13 ammette una sola soluzione con $y(0) = y'(0)$ |
| <input type="checkbox"/> 3 può ammettere esattamente due soluzioni | <input type="checkbox"/> 14 può non ammettere soluzioni con $y(0) = y'(0)$ |
| <input type="checkbox"/> 4 ammette sempre esattamente ∞^1 soluzioni | <input type="checkbox"/> 15 può non ammettere soluzioni con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ |
| <input type="checkbox"/> 5 ammette sempre esattamente ∞^2 soluzioni | <input type="checkbox"/> 16 ammette esattamente una soluzione con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ |
| <input type="checkbox"/> 6 può ammettere soluzioni solo su $(-1, 1)$ | <input type="checkbox"/> 17 ammette infinite soluzioni con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ |
| <input type="checkbox"/> 7 può ammettere soluzioni solo su $(0, +\infty)$ | <input type="checkbox"/> 18 ammette sempre $y(x) = q(x)$ come soluzione |
| <input type="checkbox"/> 8 ammette ∞^1 soluzioni con $y(0) = 0$ | |
| <input type="checkbox"/> 9 ammette una sola soluzione con $y(0) = 0$ | |
| <input type="checkbox"/> 10 ammette ∞^1 soluzioni con $y'(0) = 0$ | |
| <input type="checkbox"/> 11 ammette una sola soluzione con $y'(0) = 0$ | |