Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — *Secondo compito in itinere – 11 Gennaio 2023*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora e 15 minuti.*

Questionario (27 punti)

1. (Domanda a risposta aperta, 4 punti) Calcolare l'integrale di linea $I = \int_\gamma (xy^2 - y^3)\,\mathrm{d}x + (x^3 + y^3)\,\mathrm{d}y$ dove γ è il bordo, orientato positivamente, della regione $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2 + y^2 \le 4\,, x \le 0\,,\ y \ge 0\}$.

   $I = 6\pi + 4$

2. (Domanda a risposta multipla, 4 punti) Il campo vettoriale $\mathbf{F} = (\sin(yz), xz\cos(yz), xy\cos(yz))$

   - [x] 1 è definito su un insieme semplicemente connesso
   - [ ] 2 non è irrotazionale
   - [x] 3 è conservativo
   - [ ] 4 non ammette funzioni potenziali
   - [ ] 5 ammette esattamente una funzione potenziale
   - [x] 6 ammette infinite funzioni potenziali
   - [x] 7 compie un lavoro nullo lungo ogni curva chiusa
   - [ ] 8 compie un lavoro nullo lungo ogni curva
   - [x] 9 compie un lavoro nullo lungo ogni curva contenuta nel piano yz

3. (Domanda a risposta aperta, 4 punti) Determinare il raggio della sfera $S\ :\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, orientata positivamente, in modo che il flusso del campo $\mathbf{F} = (x^2+xy, y^2-xy-2yz, z^2-xz-3yz+z)$ sia $\Phi_S(\mathbf{F}) = 36\pi$.

   $r = 3$

4. (Domanda a risposta singola, 4 punti) L'area della superficie

$$\Sigma : \begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \qquad u^2 + v^2 \le 4$$

   è

   - ① $\mathcal{A}(\Sigma) = -\pi$
   - ② $\mathcal{A}(\Sigma) = 0$
   - ③ $\mathcal{A}(\Sigma) = 2\pi$
   - ④ $\mathcal{A}(\Sigma) = \frac{5}{3}\pi$
   - ⑤ $\mathcal{A}(\Sigma) = \frac{15}{13}\pi$
   - ⑥ ✓ $\mathcal{A}(\Sigma) = \frac{52}{3}\pi$
   - ⑦ $\mathcal{A}(\Sigma) = \frac{75}{3}\pi$
   - ⑧ $\mathcal{A}(\Sigma) = \frac{1}{3}(\pi + 1)$
   - ⑨ $\mathcal{A}(\Sigma) = \frac{5}{3}(\pi - 1)$
   - ⑩ $\mathcal{A}(\Sigma) = +\infty$

5. (Domanda a risposta singola, 3 punti) Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \mathrm{e}^{x+y(x)} \\ y(0) = -\log 2 \end{cases}$$

   - ① non ammette soluzioni
   - ② ammette infinite soluzioni
   - ③ ammette solo due soluzioni
   - ④ ammette solo una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$
   - ⑤ ammette solo una soluzione su $(-\infty, -\log 2)$
   - ⑥ ammette solo una soluzione su $(-\infty, -\log 2]$
   - ⑦ ammette solo una soluzione su $(-\log 2, 0)$
   - ⑧ ammette solo una soluzione su $(0, \log 3)$
   - ⑨ ammette solo una soluzione su $(\log 3, +\infty)$
   - ⑩ ✓ ammette solo una soluzione su $(-\infty, \log 3)$

6. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri la serie di potenze $f(x) = \sum_{n \geq 0} (3^n - 2^n) \frac{x^n}{n!}$ e sia r il suo raggio di convergenza. Allora

1 $r = 0$	4 $f(x) = e^x(e^{2x} - 1)$	7 $f(x) = e^{3x} \cos 2x$
2 $r = 1$	5 $f(x) = e^{2x}(e^x - 1)$	8 $f(x) = e^{3x} \sin 2x$
3 $r = +\infty$	6 $f(x) = e^{2x} - e^{3x}$	9 $f(x) = e^{3x} \cos 2x - e^{3x} \sin 2x$

7. (Domanda a risposta aperta, 5 punti) Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \frac{z^2}{(z^2+1)^2} \, dz$$

dove la curva $\gamma : |z - 1 - i| = 2$ è orientata positivamente.

$I = \frac{\pi}{2}$

Domande teoriche (6 punti)

1. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Dare la definizione di campo conservativo.

2. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Enunciare il teorema integrale di Cauchy per le funzioni olomorfe.

3. (Domanda a risposta multipla, 2 punti) Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, e sia $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora l'equazione differenziale $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = q(x)$

1 può non ammettere soluzioni
2 può ammettere una ed una sola soluzione
3 può ammettere esattamente due soluzioni
4 ammette sempre esattamente ∞^1 soluzioni
5 ammette sempre esattamente ∞^2 soluzioni
6 può ammettere soluzioni solo su $(-1, 1)$
7 può ammettere soluzioni solo su $(0, +\infty)$
8 ammette ∞^1 soluzioni con $y(0) = 0$
9 ammette una sola soluzione con $y(0) = 0$
10 ammette ∞^1 soluzioni con $y'(0) = 0$
11 ammette una sola soluzione con $y'(0) = 0$
12 ammette ∞^1 soluzioni con $y(0) = y'(0)$
13 ammette una sola soluzione con $y(0) = y'(0)$
14 può non ammettere soluzioni con $y(0) = y'(0)$
15 può non ammettere soluzioni con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$
16 ammette esattamente una soluzione con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$
17 ammette infinite soluzioni con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$
18 ammette sempre $y(x) = q(x)$ come soluzione