ANALISI MATEMATICA II *Primo Appello – 28 Gennaio 2023*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora e 30 minuti.*

QUESTIONARIO (27 punti)

1. (Domanda a risposta multipla, 4 punti) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, data da $f(x,y) = \operatorname{artg}(x^2 - y^2)$, e la regione $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

- [1] f non possiede punti critici
- [2] f possiede un solo punto critico
- [3] f possiede infiniti punti critici
- [4] $(0,0)$ è un punto di massimo
- [5] $(0,0)$ è un punto di minimo
- [6] $(0,0)$ è un punto di sella
- [7] Ω è un aperto
- [8] Ω è limitato
- [9] f non possiede punti di minimo su Ω
- [10] f non possiede punti di massimo su Ω
- [11] f possiede almeno un punto di minimo e un punto di massimo su Ω

2. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t + \cos t \\ y = t - \sin t \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

e la terna intrinseca $\{\mathbf{t}(0), \mathbf{n}(0), \mathbf{b}(0)\}$ nel punto $P \equiv (1,0,0)$. Allora

- [1] $\mathbf{t}(0) = \dfrac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}$
- [2] $\mathbf{t}(0) = \dfrac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$
- [3] $\mathbf{t}(0) = \dfrac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}$
- [4] $\mathbf{n}(0) = \dfrac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}$
- [5] $\mathbf{n}(0) = \dfrac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}}$
- [6] $\mathbf{n}(0) = \dfrac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}}$
- [7] $\mathbf{b}(0) = (0,1,0)$
- [8] $\mathbf{b}(0) = (0,-1,0)$
- [9] $\mathbf{b}(0) = \dfrac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}$

3. (Domanda a risposta multipla, 4 punti) Il campo vettoriale $\mathbf{F} = (2xy + e^x, x^2 + e^y)$

- [1] è irrotazionale
- [2] è conservativo
- [3] non ammette funzioni potenziali
- [4] ammette esattamente una funzione potenziale
- [5] ammette infinite funzioni potenziali
- [6] compie un lavoro nullo lungo ogni curva chiusa
- [7] compie un lavoro nullo lungo ogni curva
- [8] compie un lavoro $L = 2e - 1$ lungo ogni curva che va da $P \equiv (0,0)$ a $Q \equiv (1,1)$
- [9] compie un lavoro $L = e - 2$ lungo ogni curva che va da $P \equiv (0,0)$ a $Q \equiv (1,1)$

4. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Determinare il raggio della sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, orientata positivamente, in modo che il flusso del campo $\mathbf{F} = (3xy + xz + 2x, 3xy - y^2 - 3yz, z^2 - 3xz - yz)$ sia $\Phi_S(\mathbf{F}) = \dfrac{\pi}{3}$.

$r = \ldots\ldots\ldots\ldots$

5. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Calcolare l'area della superficie

$$\Sigma : \begin{cases} x = u^2 + v^2 \\ y = u^2 - v^2 \\ z = 2uv \end{cases} \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u^2 + v^2 \leq 1 .$$

$\mathcal{A}(\Sigma) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

6. (Domanda a risposta singola, 3 punti) L'equazione differenziale

$$y''(x) - 7y'(x) + 6y(x) = 6$$

① è omogenea
② non ammette soluzioni
③ ammette esattamente una soluzione
④ ammette esattamente due soluzioni
⑤ non ammette soluzioni costanti
⑥ ammette infinite soluzioni costanti
⑦ ammette esattamente una soluzione costante
⑧ ammette esattamente due soluzioni costanti

---

7. (Domanda a risposta singola, 3 punti) Nel campo complesso, la serie di potenze $f(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{2^n \sqrt{n}}$

① non converge mai
② converge solo per $z = 0$
③ converge per $z < 2$
④ converge per $z < 4$
⑤ converge per $|z| < 2$
⑥ converge per $|z| < 4$
⑦ converge per $2 < |z| < 4$
⑧ converge per ogni $z \in \mathbb{R}$
⑨ converge per ogni $z \in \mathbb{C}$

---

8. (Domanda a risposta aperta, 4 punti) Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)(z^2+4)}\, dz$$

dove la curva $\gamma : |z - 3i| = 3$ è orientata positivamente.

$I =$ ....

Domande teoriche (6 punti)

1. (Domanda a risposta aperta, 1 punto) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di una funzione differenziabile $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in un punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

2. (Domanda a risposta aperta, 1.5 punti) Enunciare il teorema della formula del gradiente.

3. (Domanda a risposta aperta, 1.5 punti) Enunciare il teorema di Gauss-Green per una regione xy-semplice.

4. (Domanda a risposta multipla, 2 punti) Sia $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ e sia $f : D \to \mathbb{C}$ la funzione definita dalla serie di potenze $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n$, avente raggio di convergenza $r > 0$.

[1] f è continua su D
[2] f è derivabile su D
[3] f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su D
[4] f è olomorfa su D
[5] $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ per ogni curva $\gamma \subseteq D$
[6] $\int_\gamma z^2 \sin(f(z))\, dz = 0$ per ogni curva $\gamma \subseteq D$
[7] $\int_\gamma z f(z)\, dz = 0$ per ogni curva chiusa $\gamma \subseteq D$
[8] $\int_\gamma f(z)^2\, dz = 0$ per ogni curva chiusa $\gamma \subseteq D$
[9] $\int_\gamma f(e^z)\, dz = 0$ per ogni curva chiusa $\gamma \subseteq D$