

Cognome: \_\_\_\_\_

Matricola: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

Punteggio Totale: \_\_\_\_\_

**Istruzioni.** Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

**Tempo.** 1 ora e 30 minuti.

## QUESTIONARIO (27 punti)

1. (Domanda a risposta multipla, 4 punti) Si consideri la funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , data da  $f(x, y) = \operatorname{artg}(x^2 - y^2)$ , e la regione  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ .

- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> 1 $f$ non possiede punti critici                | <input type="checkbox"/> 7 $\Omega$ è un aperto   |
| <input checked="" type="checkbox"/> 2 $f$ possiede un solo punto critico | <input checked="" type="checkbox"/> 8 $\Omega$ è limitato   |
| <input type="checkbox"/> 3 $f$ possiede infiniti punti critici           | <input type="checkbox"/> 9 $f$ non possiede punti di minimo su $\Omega$   |
| <input type="checkbox"/> 4 $(0, 0)$ è un punto di massimo                | <input type="checkbox"/> 10 $f$ non possiede punti di massimo su $\Omega$                                       |
| <input type="checkbox"/> 5 $(0, 0)$ è un punto di minimo                 | <input checked="" type="checkbox"/> 11 $f$ possiede almeno un punto di minimo e un punto di massimo su $\Omega$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 6 $(0, 0)$ è un punto di sella       |   |

2. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri la curva

$$\gamma: \begin{cases} x = t + \cos t \\ y = t - \sin t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

e la terna intrinseca  $\{\mathbf{t}(0), \mathbf{n}(0), \mathbf{b}(0)\}$  nel punto  $P \equiv (1, 0, 0)$ . Allora

- |  |   |  |
|--|---|--|
| <input type="checkbox"/> 1 $\mathbf{t}(0) = \frac{(1, 0, -1)}{\sqrt{2}}$           | <input type="checkbox"/> 4 $\mathbf{n}(0) = \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}}$             | <input type="checkbox"/> 7 $\mathbf{b}(0) = (0, 1, 0)$                   |
| <input type="checkbox"/> 2 $\mathbf{t}(0) = \frac{(1, -1, 0)}{\sqrt{2}}$           | <input checked="" type="checkbox"/> 5 $\mathbf{n}(0) = \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}}$ | <input checked="" type="checkbox"/> 8 $\mathbf{b}(0) = (0, -1, 0)$       |
| <input checked="" type="checkbox"/> 3 $\mathbf{t}(0) = \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}}$ | <input type="checkbox"/> 6 $\mathbf{n}(0) = \frac{(0, 1, -1)}{\sqrt{2}}$            | <input type="checkbox"/> 9 $\mathbf{b}(0) = \frac{(1, 0, -1)}{\sqrt{2}}$ |

3. (Domanda a risposta multipla, 4 punti) Il campo vettoriale  $\mathbf{F} = (2xy + e^x, x^2 + e^y)$

- |  |  |
|--|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 è irrotazionale                                | <input type="checkbox"/> 7 compie un lavoro nullo lungo ogni curva   |
| <input checked="" type="checkbox"/> 2 è conservativo                                 | <input checked="" type="checkbox"/> 8 compie un lavoro $L = 2e - 1$ lungo ogni curva che va da $P \equiv (0, 0)$ a $Q \equiv (1, 1)$ |
| <input type="checkbox"/> 3 non ammette funzioni potenziali                           | <input type="checkbox"/> 9 compie un lavoro $L = e - 2$ lungo ogni curva che va da $P \equiv (0, 0)$ a $Q \equiv (1, 1)$             |
| <input type="checkbox"/> 4 ammette esattamente una funzione potenziale               |  |
| <input checked="" type="checkbox"/> 5 ammette infinite funzioni potenziali           |  |
| <input checked="" type="checkbox"/> 6 compie un lavoro nullo lungo ogni curva chiusa |  |

4. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Determinare il raggio della sfera  $S: x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , orientata positivamente, in modo che il flusso del campo  $\mathbf{F} = (3xy + xz + 2x, 3xy - y^2 - 3yz, z^2 - 3xz - yz)$  sia  $\Phi_S(\mathbf{F}) = \frac{\pi}{3}$ .

$$r = 1/2$$

5. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Calcolare l'area della superficie

$$\Sigma: \begin{cases} x = u^2 + v^2 \\ y = u^2 - v^2 \\ z = 2uv \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1.$$

$$A(\Sigma) = 2\sqrt{2}\pi$$

6. (Domanda a risposta singola, 3 punti) L'equazione differenziale

$$y''(x) - 7y'(x) + 6y(x) = 6$$

- |   |   |
|---|---|
| <input type="radio"/> ① è omogenea                        | <input type="radio"/> ⑤ non ammette soluzioni costanti                        |
| <input type="radio"/> ② non ammette soluzioni             | <input type="radio"/> ⑥ ammette infinite soluzioni costanti                   |
| <input type="radio"/> ③ ammette esattamente una soluzione | <input checked="" type="radio"/> ⑦ ammette esattamente una soluzione costante |
| <input type="radio"/> ④ ammette esattamente due soluzioni | <input type="radio"/> ⑧ ammette esattamente due soluzioni costanti            |
- 

7. (Domanda a risposta singola, 3 punti) Nel campo complesso, la serie di potenze  $f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{2^n \sqrt{n}}$

- |   |   |  |
|---|---|--|
| <input type="radio"/> ① non converge mai          | <input type="radio"/> ④ converge per $z < 4$              | <input type="radio"/> ⑦ converge per $2 <  z  < 4$           |
| <input type="radio"/> ② converge solo per $z = 0$ | <input checked="" type="radio"/> ⑤ converge per $ z  < 2$ | <input type="radio"/> ⑧ converge per ogni $z \in \mathbb{R}$ |
| <input type="radio"/> ③ converge per $z < 2$      | <input type="radio"/> ⑥ converge per $ z  < 4$            | <input type="radio"/> ⑨ converge per ogni $z \in \mathbb{C}$ |
- 

8. (Domanda a risposta aperta, 4 punti) Calcolare l'integrale

$$I = \int_{\gamma} \frac{e^{\pi z}}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz$$

dove la curva  $\gamma : |z - 3i| = 3$  è orientata positivamente.

$$I = -\frac{\pi}{2}$$

---

### DOMANDE TEORICHE (6 punti)

1. (Domanda a risposta aperta, 1 punto) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di una funzione differenziabile  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  in un punto  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

2. (Domanda a risposta aperta, 1.5 punti) Enunciare il teorema della formula del gradiente.

3. (Domanda a risposta aperta, 1.5 punti) Enunciare il teorema di Gauss-Green per una regione  $xy$ -semplice.

4. (Domanda a risposta multipla, 2 punti) Sia  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$  e sia  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  la funzione definita dalla serie di potenze  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ , avente raggio di convergenza  $r > 0$ .

- |  |  |
|--|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> ① $f$ è continua su $D$                                | <input type="checkbox"/> ⑥ $\int_{\gamma} z^2 \sin(f(z)) dz = 0$ per ogni curva $\gamma \subseteq D$           |
| <input checked="" type="checkbox"/> ② $f$ è derivabile su $D$                              | <input checked="" type="checkbox"/> ⑦ $\int_{\gamma} z f(z) dz = 0$ per ogni curva chiusa $\gamma \subseteq D$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> ③ $f$ è di classe $C^\infty$ su $D$                    | <input checked="" type="checkbox"/> ⑧ $\int_{\gamma} f(z)^2 dz = 0$ per ogni curva chiusa $\gamma \subseteq D$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> ④ $f$ è olomorfa su $D$                                | <input checked="" type="checkbox"/> ⑨ $\int_{\gamma} f(e^z) dz = 0$ per ogni curva chiusa $\gamma \subseteq D$ |
| <input type="checkbox"/> ⑤ $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ per ogni curva $\gamma \subseteq D$ |  |