Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — *Secondo Appello – 8 Giugno 2023*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora e 30 minuti.*

Questionario (27 punti)

1. (Domanda a risposta singola, 3 punti) La derivata direzionale $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)$ della funzione $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, definita da $f(x,y,z)=x^4+x^3y+y^2z^2+z^3$, lungo il versore $\mathbf{v}=\dfrac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}}$, nel punto $\mathbf{x}_0=(1,-1,1)$ è

① 0 ② -1 ③ 1 ④ $-\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$ ⑥ $-\sqrt{6}$ ⑦ $\sqrt{6}$

---

2. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definita da $f(x,y)=xe^x-ye^y$. Allora

- [1] f non possiede punti critici
- [2] f possiede un solo punto critico
- [3] f possiede infiniti punti critici
- [4] $(0,0)$ è un punto critico di f
- [5] $(1,1)$ è un punto critico di f
- [6] $(-1,-1)$ è un punto critico di f
- [7] f possiede un punto di minimo locale
- [8] f possiede un punto di massimo locale
- [9] f possiede un punto di sella
- [10] f è limitata

---

3. (Domanda a risposta singola, 4 punti) Sia $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2-2x\le 0,\ y\ge x\}$. Il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F}=(x^3-y^2+2xy, x^2-xy+y^3)$ lungo il bordo $\gamma=\partial\Omega$, orientato positivamente, è

① 0 ② 1 ③ -1 ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $-\dfrac{1}{2}$ ⑥ $\dfrac{3}{4}$ ⑦ $-\dfrac{3}{4}$ ⑧ $\dfrac{1}{6}$ ⑨ $-\dfrac{1}{6}$

---

4. (Domanda a risposta multipla, 4 punti) Si consideri la curva γ parametrizzata dalla funzione vettoriale $f(t)=(t+e^t, t^2+2te^t, 2t-e^t)$, $t\in\mathbb{R}$. Sia $\mathbf{t}(0)$ il versore tangente a γ per $t=0$. Allora

- [1] $(0,0,0)\in\gamma$
- [2] $(1,-1,-1)\in\gamma$
- [3] $(1,0,-1)\in\gamma$
- [4] $(1,1,-1)\in\gamma$
- [5] γ è regolare in $t=0$
- [6] γ non è regolare in $t=0$
- [7] $\mathbf{t}(0)=(2,2,1)$
- [8] $\mathbf{t}(0)=-(2,2,1)$
- [9] $\mathbf{t}(0)=\dfrac{(2,2,1)}{3}$
- [10] $\mathbf{t}(0)=\dfrac{(2,1,2)}{3}$
- [11] $\mathbf{t}(0)=-\dfrac{(1,2,2)}{3}$

---

5. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Il problema di Cauchy $\begin{cases} y'(x)=2x^3y^3 \\ y(0)=1 \end{cases}$

- [1] non ammette soluzioni
- [2] ammette infinite soluzioni
- [3] ammette solo una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$
- [4] ammette solo una soluzione su $(-\infty,-1)$
- [5] ammette solo una soluzione su $(-\infty,1]$
- [6] ammette solo una soluzione su $[-1,+\infty)$
- [7] ammette solo una soluzione su $(1,+\infty)$
- [8] ammette solo una soluzione su $(-1,1)$
- [9] ammette solo una soluzione su $[-1,1]$
- [10] ammette solo una soluzione pari
- [11] ammette solo una soluzione dispari

---

6. (Domanda a risposta aperta, 4 punti) Determinare il raggio della sfera $S\ :\ x^2+y^2+z^2=r^2$, orientata positivamente, in modo che il flusso del campo $\mathbf{F}=(x^3+y^2\mathrm{e}^{yz}, y^3+x^3\mathrm{e}^{xz}, z^3+y^2\mathrm{e}^{-xy})$ sia $\Phi_S(\mathbf{F})=12\pi$.

$r=$ ....

---

7. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri la serie di potenze $f(x)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n 4^{n+1}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ e il suo raggio di convergenza r. Allora

$\boxed{1}$ $r=0$	$\boxed{4}$ $f(x)=\cos 4x$	$\boxed{7}$ $f(x)=\sinh 4x$	$\boxed{10}$ $f(x)=4\cos 2x$
$\boxed{2}$ $r=1$	$\boxed{5}$ $f(x)=\cosh 4x$	$\boxed{8}$ $f(x)=2\cosh 2x$	$\boxed{11}$ $f(x)=4\sin 4x$
$\boxed{3}$ $r=+\infty$	$\boxed{6}$ $f(x)=\sin 4x$	$\boxed{9}$ $f(x)=2\sinh 2x$	$\boxed{12}$ $f(x)=\mathrm{e}^{4x}\cos 2x$

---

8. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Calcolare l'integrale

$$I=\int_\gamma \frac{(z^2+1)\,\mathrm{e}^z}{(z^2+z+1)^4}\,\mathrm{d}z$$

dove la curva $\gamma : |z-1|=3/2$ è orientata positivamente.

$I=$ ....

Domande teoriche (6 punti)

1. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Scrivere le coordinate del baricentro di una regione semplice $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ munita di densità superficiale di massa δ.

2. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Enunciare il teorema di esistenza e unicità locale della soluzione di un problema di Cauchy relativo a un'equazione differenziale a variabili separabili.

3. (Domanda a risposta multipla, 2 punti) Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione di due variabili e sia $\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^2$. Allora

$\boxed{1}$ f continua in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f derivabile in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{2}$ f derivabile in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f continua in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{3}$ f continua in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f differenziabile in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{4}$ f differenziabile in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f continua in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{5}$ f derivabile in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f differenziabile in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{6}$ f differenziabile in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f derivabile in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{7}$ f possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f continua in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{8}$ f continua in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow f$ possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{9}$ f possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f derivabile in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{10}$ f derivabile in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow f$ possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{11}$ f possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f differenziabile in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{12}$ f differenziabile in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{13}$ f differenziabile in $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ f di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$

$\boxed{14}$ f di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ $\Rightarrow$ f differenziabile in $\mathbb{R}^2$