ANALISI MATEMATICA II *Secondo Appello – 8 Giugno 2023*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora e 30 minuti.*

QUESTIONARIO (27 punti)

1. (Domanda a risposta singola, 3 punti) La derivata direzionale $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)$ della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definita da $f(x,y,z) = x^4 + x^3y + y^2z^2 + z^3$, lungo il versore $\mathbf{v} = \dfrac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}}$, nel punto $\mathbf{x}_0 = (1,-1,1)$ è

① 0 ② -1 ③ 1 ④ $-\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$ ⑥ $-\sqrt{6}$ ⑦ $\sqrt{6}$

2. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da $f(x,y) = xe^x - ye^y$. Allora

- [1] f non possiede punti critici
- [2] f possiede un solo punto critico
- [3] f possiede infiniti punti critici
- [4] $(0,0)$ è un punto critico di f
- [5] $(1,1)$ è un punto critico di f
- [6] $(-1,-1)$ è un punto critico di f
- [7] f possiede un punto di minimo locale
- [8] f possiede un punto di massimo locale
- [9] f possiede un punto di sella
- [10] f è limitata

3. (Domanda a risposta singola, 4 punti) Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0,\ y \geq x\}$. Il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F} = (x^3 - y^2 + 2xy, x^2 - xy + y^3)$ lungo il bordo $\gamma = \partial\Omega$, orientato positivamente, è

① 0 ② 1 ③ -1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$ ⑥ $\frac{3}{4}$ ⑦ $-\frac{3}{4}$ ⑧ $\frac{1}{6}$ ⑨ $-\frac{1}{6}$

4. (Domanda a risposta multipla, 4 punti) Si consideri la curva γ parametrizzata dalla funzione vettoriale $f(t) = (t + e^t, t^2 + 2te^t, 2t - e^t)$, $t \in \mathbb{R}$. Sia $\mathbf{t}(0)$ il versore tangente a γ per $t = 0$. Allora

- [1] $(0,0,0) \in \gamma$
- [2] $(1,-1,-1) \in \gamma$
- [3] $(1,0,-1) \in \gamma$
- [4] $(1,1,-1) \in \gamma$
- [5] γ è regolare in $t = 0$
- [6] γ non è regolare in $t = 0$
- [7] $\mathbf{t}(0) = (2,2,1)$
- [8] $\mathbf{t}(0) = -(2,2,1)$
- [9] $\mathbf{t}(0) = \dfrac{(2,2,1)}{3}$
- [10] $\mathbf{t}(0) = \dfrac{(2,1,2)}{3}$
- [11] $\mathbf{t}(0) = -\dfrac{(1,2,2)}{3}$

5. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Il problema di Cauchy $\begin{cases} y'(x) = 2x^3y^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

- [1] non ammette soluzioni
- [2] ammette infinite soluzioni
- [3] ammette solo una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$
- [4] ammette solo una soluzione su $(-\infty,-1)$
- [5] ammette solo una soluzione su $(-\infty,1]$
- [6] ammette solo una soluzione su $[-1,+\infty)$
- [7] ammette solo una soluzione su $(1,+\infty)$
- [8] ammette solo una soluzione su $(-1,1)$
- [9] ammette solo una soluzione su $[-1,1]$
- [10] ammette solo una soluzione pari
- [11] ammette solo una soluzione dispari

6. (Domanda a risposta aperta, 4 punti) Determinare il raggio della sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, orientata positivamente, in modo che il flusso del campo $\mathbf{F} = (x^3 + y^2 e^{yz}, y^3 + x^3 e^{xz}, z^3 + y^2 e^{-xy})$ sia $\Phi_S(\mathbf{F}) = 12\pi$.

   $r = \sqrt[5]{5}$

---

7. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri la serie di potenze $f(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n 4^{n+1} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ e il suo raggio di convergenza r. Allora

- [ ] 1 $r = 0$
- [ ] 2 $r = 1$
- [x] 3 $r = +\infty$
- [ ] 4 $f(x) = \cos 4x$
- [ ] 5 $f(x) = \cosh 4x$
- [ ] 6 $f(x) = \sin 4x$
- [ ] 7 $f(x) = \sinh 4x$
- [ ] 8 $f(x) = 2\cosh 2x$
- [ ] 9 $f(x) = 2\sinh 2x$
- [x] 10 $f(x) = 4\cos 2x$
- [ ] 11 $f(x) = 4\sin 4x$
- [ ] 12 $f(x) = e^{4x}\cos 2x$

---

8. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \frac{(z^2+1)\,e^z}{(z^2+z+1)^4}\,dz$$

   dove la curva $\gamma : |z-1| = 3/2$ è orientata positivamente.

   $I = 0$

Domande teoriche (6 punti)

1. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Scrivere le coordinate del baricentro di una regione semplice $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ munita di densità superficiale di massa δ.

2. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Enunciare il teorema di esistenza e unicità locale della soluzione di un problema di Cauchy relativo a un'equazione differenziale a variabili separabili.

3. (Domanda a risposta multipla, 2 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili e sia $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. Allora

- [ ] 1 f continua in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f derivabile in $\mathbf{x}_0$
- [ ] 2 f derivabile in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f continua in $\mathbf{x}_0$
- [ ] 3 f continua in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f differenziabile in $\mathbf{x}_0$
- [x] 4 f differenziabile in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f continua in $\mathbf{x}_0$
- [ ] 5 f derivabile in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f differenziabile in $\mathbf{x}_0$
- [x] 6 f differenziabile in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f derivabile in $\mathbf{x}_0$
- [ ] 7 f possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f continua in $\mathbf{x}_0$
- [ ] 8 f continua in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$
- [x] 9 f possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f derivabile in $\mathbf{x}_0$
- [ ] 10 f derivabile in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$
- [ ] 11 f possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f differenziabile in $\mathbf{x}_0$
- [x] 12 f differenziabile in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$
- [ ] 13 f differenziabile in $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ f di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$
- [x] 14 f di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ $\Rightarrow$ f differenziabile in $\mathbb{R}^2$