Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — *Terzo Appello – 3 Luglio 2023*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora e 30 minuti.*

Questionario (27 punti)

1. (Domanda a risposta singola, 3 punti) L'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da $f(x, y) = x\mathrm{e}^{xy} + y\cos(x + y)$, nel punto $X_0 = (0, \pi, -\pi)$ è

   ① $x + y + z = 0$ ③ $x + y - z = 0$ ⑤ $x + y + z = \pi$ ⑦ $x + y - z = \pi$

   ② $x - y + z = 0$ ④ $x - y - z = 0$ ⑥ $x - y + z = \pi$ ⑧ $x - y - z = \pi$

---

2. (Domanda a risposta multipla, 4 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 2$. Allora

   1 f non possiede punti critici

   2 f possiede un solo punto critico

   3 f possiede 3 punti critici

   4 f possiede 6 punti critici

   5 f possiede 9 punti critici

   6 f possiede infiniti punti critici

   7 f possiede un solo punto di minimo locale

   8 f possiede un solo punto di massimo locale

   9 f possiede un solo punto di sella

   10 f possiede 4 punti di minimo locale

   11 f possiede 4 punti di massimo locale

   12 f possiede 4 punti di sella

---

3. (Domanda a risposta singola, 3 punti) Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \leq 1\,,\; y \leq x\}$. Il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F} = (x^4 - y^3 + 2x^2y, x^3 - 2xy^2 + y^4)$ lungo il bordo $\gamma = \partial\Omega$, orientato positivamente, è

   ① 0 ② 1 ③ -1 ④ π ⑤ $-\pi$ ⑥ $\dfrac{\pi}{2}$ ⑦ $-\dfrac{\pi}{2}$ ⑧ $\dfrac{\pi}{4}$ ⑨ $-\dfrac{\pi}{4}$

---

4. (Domanda a risposta singola, 3 punti) Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 \leq 1\,,\; x \geq 0\,,\; y \geq 0\,,\; 0 \leq z \leq 1\}$. L'integrale triplo $I = \displaystyle\iiint_\Omega \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ vale

   ① 0 ③ $-\dfrac{\pi}{2}$ ⑤ $-\dfrac{\pi}{4}$ ⑦ $-\dfrac{\pi}{8}$ ⑨ $\dfrac{\pi(2-\pi)}{4}$ ⑪ $\dfrac{\pi(2\pi-1)}{4}$

   ② $\dfrac{\pi}{2}$ ④ $\dfrac{\pi}{4}$ ⑥ $\dfrac{\pi}{8}$ ⑧ $\dfrac{\pi(1-\pi)}{2}$ ⑩ $\dfrac{\pi(4-\pi)}{8}$ ⑫ $\dfrac{\pi(4\pi-1)}{8}$

---

5. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Sia f la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ e sia I l'intervallo massimale su cui f è definita. Allora

   $f(x) =$ $I =$

---

6. (Domanda a risposta aperta, 4 punti) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = (x - y, x + z, y)$ attraverso la superficie Σ data dal rettangolo di vertici $O \equiv (0, 0, 0)$, $A \equiv (1, 1, 0)$, $B \equiv (1, 1, 1)$, $C \equiv (0, 0, 1)$, orientato in modo che il bordo abbia orientazione $OABC$.

   $\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) =$

---

7. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri la serie di potenze $f(x) = \sum_{n\geq 0}(-9)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e il suo raggio di convergenza r. Allora

$\boxed{1}$ $r = 0$	$\boxed{4}$ $f(x) = \frac{1}{9}\cos 9x$	$\boxed{7}$ $f(x) = \sinh 9x$	$\boxed{10}$ $f(x) = \frac{1}{3}\cos 3x$
$\boxed{2}$ $r = 1$	$\boxed{5}$ $f(x) = \frac{1}{9}\cosh 9x$	$\boxed{8}$ $f(x) = 3\cosh 3x$	$\boxed{11}$ $f(x) = \frac{1}{3}\sin 3x$
$\boxed{3}$ $r = +\infty$	$\boxed{6}$ $f(x) = \sin 9x$	$\boxed{9}$ $f(x) = 3\sinh 3x$	$\boxed{12}$ $f(x) = 9\sin x$

---

8. (Domanda a risposta multipla, 4 punti) Si consideri la funzione complessa $f(z) = \frac{e^{1/z}}{(z^2+1)(z^2+4)}$. Allora

$\boxed{1}$ f è intera
$\boxed{2}$ f non possiede punti singolari
$\boxed{3}$ f possiede un solo punto singolare
$\boxed{4}$ f possiede 5 punti singolari
$\boxed{5}$ f possiede infiniti punti singolari
$\boxed{6}$ f non possiede poli
$\boxed{7}$ f possiede solo 2 poli
$\boxed{8}$ f possiede 4 poli
$\boxed{9}$ f non possiede singolarità essenziali
$\boxed{10}$ f possiede una sola singolarità essenziale
$\boxed{11}$ f possiede infinite singolarità essenziali
$\boxed{12}$ f è olomorfa in $|z| < 1/3$
$\boxed{13}$ f è olomorfa in $1/2 < |z| < 1/3$
$\boxed{14}$ $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, se $\gamma : |z-1| = 2$
$\boxed{15}$ $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, se $\gamma : |z-i| = 1/2$
$\boxed{16}$ $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, se $\gamma : |z-1-i| = 1/2$

Domande teoriche (6 punti)

1. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Enunciare il teorema di Weierstrass per una funzione di più variabili.

2. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Enunciare il teorema della divergenza nello spazio.

3. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Scrivere la serie di Fourier di una funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ continua.