

Cognome: _____

Matricola: _____

Nome: _____

Punteggio Totale: _____

Istruzioni. Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

Tempo. 1 ora e 30 minuti.

QUESTIONARIO (27 punti)

1. (Domanda a risposta singola, 3 punti) L'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x, y) = xe^{xy} + y \cos(x + y)$, nel punto $X_0 = (0, \pi, -\pi)$ è

- ① $x + y + z = 0$ ③ $x + y - z = 0$ ⑤ $x + y + z = \pi$ ⑦ $x + y - z = \pi$
 ② $x - y + z = 0$ ④ $x - y - z = 0$ ⑥ $x - y + z = \pi$ ⑧ $x - y - z = \pi$

2. (Domanda a risposta multipla, 4 punti) Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 2$. Allora

- ① f non possiede punti critici ⑦ f possiede un solo punto di minimo locale
 ② f possiede un solo punto critico ⑧ f possiede un solo punto di massimo locale
 ③ f possiede 3 punti critici ⑨ f possiede un solo punto di sella
 ④ f possiede 6 punti critici ⑩ f possiede 4 punti di minimo locale
 ⑤ f possiede 9 punti critici ⑪ f possiede 4 punti di massimo locale
 ⑥ f possiede infiniti punti critici ⑫ f possiede 4 punti di sella

3. (Domanda a risposta singola, 3 punti) Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \leq x\}$. Il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F} = (x^4 - y^3 + 2x^2y, x^3 - 2xy^2 + y^4)$ lungo il bordo $\gamma = \partial\Omega$, orientato positivamente, è

- ① 0 ② 1 ③ -1 ④ π ⑤ $-\pi$ ⑥ $\frac{\pi}{2}$ ⑦ $-\frac{\pi}{2}$ ⑧ $\frac{\pi}{4}$ ⑨ $-\frac{\pi}{4}$

4. (Domanda a risposta singola, 3 punti) Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1\}$.

L'integrale triplo $I = \iiint_{\Omega} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{1 + x^2 + y^2} dx dy dz$ vale

- ① 0 ③ $-\frac{\pi}{2}$ ⑤ $-\frac{\pi}{4}$ ⑦ $-\frac{\pi}{8}$ ⑨ $\frac{\pi(2 - \pi)}{4}$ ⑪ $\frac{\pi(2\pi - 1)}{4}$
 ② $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑥ $\frac{\pi}{8}$ ⑧ $\frac{\pi(1 - \pi)}{2}$ ⑩ $\frac{\pi(4 - \pi)}{8}$ ⑫ $\frac{\pi(4\pi - 1)}{8}$

5. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Sia f la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ e sia I l'intervallo massimale su cui f è definita. Allora

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^2}, \quad I = (-1, 1)$$

6. (Domanda a risposta aperta, 4 punti) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = (x - y, x + z, y)$ attraverso la superficie Σ data dal rettangolo di vertici $O \equiv (0, 0, 0)$, $A \equiv (1, 1, 0)$, $B \equiv (1, 1, 1)$, $C \equiv (0, 0, 1)$, orientato in modo che il bordo abbia orientazione $OABC$.

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{F}) = -1$$

7. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri la serie di potenze $f(x) = \sum_{n \geq 0} (-9)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e il suo raggio di convergenza r . Allora

- | | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------|----------------------------|-------------------------------|----------------------------|---------------------|--|------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $r = 0$ | <input type="checkbox"/> 4 | $f(x) = \frac{1}{9} \cos 9x$ | <input type="checkbox"/> 7 | $f(x) = \sinh 9x$ | <input type="checkbox"/> 10 | $f(x) = \frac{1}{3} \cos 3x$ |
| <input type="checkbox"/> 2 | $r = 1$ | <input type="checkbox"/> 5 | $f(x) = \frac{1}{9} \cosh 9x$ | <input type="checkbox"/> 8 | $f(x) = 3 \cosh 3x$ | <input checked="" type="checkbox"/> 11 | $f(x) = \frac{1}{3} \sin 3x$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 3 | $r = +\infty$ | <input type="checkbox"/> 6 | $f(x) = \sin 9x$ | <input type="checkbox"/> 9 | $f(x) = 3 \sinh 3x$ | <input type="checkbox"/> 12 | $f(x) = 9 \sin x$ |

8. (Domanda a risposta multipla, 4 punti) Si consideri la funzione complessa $f(z) = \frac{e^{1/z}}{(z^2+1)(z^2+4)}$. Allora

- | | | | |
|---------------------------------------|---|--|---|
| <input type="checkbox"/> 1 | f è intera | <input checked="" type="checkbox"/> 10 | f possiede una sola singolarità essenziale |
| <input type="checkbox"/> 2 | f non possiede punti singolari | <input type="checkbox"/> 11 | f possiede infinite singolarità essenziali |
| <input type="checkbox"/> 3 | f possiede un solo punto singolare | <input type="checkbox"/> 12 | f è olomorfa in $ z < 1/3$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 4 | f possiede 5 punti singolari | <input checked="" type="checkbox"/> 13 | f è olomorfa in $1/3 < z < 1/2$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | f possiede infiniti punti singolari | <input type="checkbox"/> 14 | $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, se $\gamma : z-1 = 2$ |
| <input type="checkbox"/> 6 | f non possiede poli | <input type="checkbox"/> 15 | $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, se $\gamma : z-i = 1/2$ |
| <input type="checkbox"/> 7 | f possiede solo 2 poli | <input checked="" type="checkbox"/> 16 | $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, se $\gamma : z-1-i = 1/2$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 8 | f possiede 4 poli | | |
| <input type="checkbox"/> 9 | f non possiede singolarità essenziali | | |

DOMANDE TEORICHE (6 punti)

1. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Enunciare il teorema di Weierstrass per una funzione di più variabili.

2. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Enunciare il teorema della divergenza nello spazio.

3. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Scrivere la serie di Fourier di una funzione $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.