Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — *Quarto Appello – 28 Agosto 2023*

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________ **Punteggio Totale:** ____________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora e 30 minuti.*

Questionario (27 punti)

1. (Domanda a risposta multipla, 4 punti) Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 1\}$, e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y) = \log(2-x^2-y^2)$. Allora

- $\boxed{1}$ $f(\mathbf{x}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$
- $\boxed{2}$ $f(\mathbf{x}) \leq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$
- $\boxed{3}$ f non possiede punti di massimo
- $\boxed{4}$ f non possiede punti di minimo
- $\boxed{5}$ f possiede un solo punto di massimo
- $\boxed{6}$ f possiede un solo punto di minimo
- $\boxed{7}$ f possiede infiniti punti di massimo
- $\boxed{8}$ f possiede infiniti punti di minimo
- $\boxed{9}$ f possiede almeno un punto di massimo su $\partial\Omega$
- $\boxed{10}$ f possiede almeno un punto di minimo su $\partial\Omega$

---

2. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione $F(x,y) = (x^2+2y, 2x+y^2)$. Allora F

- $\boxed{1}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$
- $\boxed{2}$ è localmente invertibile su tutto $\mathbb{R}^2$
- $\boxed{3}$ è globalmente invertibile su tutto $\mathbb{R}^2$
- $\boxed{4}$ non possiede punti singolari
- $\boxed{5}$ possiede esattamente un punto singolare
- $\boxed{6}$ possiede infiniti punti singolari che si dispongono lungo una circonferenza
- $\boxed{7}$ possiede infiniti punti singolari che si dispongono lungo una parabola
- $\boxed{8}$ possiede infiniti punti singolari che si dispongono lungo un'iperbole

---

3. (Domanda a risposta singola, 3 punti) Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 1 \,,\ x+y \geq 0\}$. L'integrale doppio $I = \iint_\Omega (x^2+y^2)^2 \, dx\, dy$ vale

① 1 ② -1 ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $-\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\frac{\pi}{4}$ ⑥ $-\frac{\pi}{4}$ ⑦ $\frac{\pi}{6}$ ⑧ $-\frac{\pi}{6}$

---

4. (Domanda a risposta multipla, 4 punti) Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F} = (x+y+z, x-y+z, x+y-z)$. Allora

- $\boxed{1}$ $\mathbf{F}$ è irrotazionale
- $\boxed{2}$ $\mathbf{F}$ è conservativo
- $\boxed{3}$ $\mathbf{F}$ non possiede funzioni potenziali
- $\boxed{4}$ $\mathbf{F}$ possiede una sola funzione potenziale
- $\boxed{5}$ $\mathbf{F}$ possiede infinite funzioni potenziali
- $\boxed{6}$ $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$
- $\boxed{7}$ $\operatorname{div}\mathbf{F} = 1$
- $\boxed{8}$ $\operatorname{div}\mathbf{F} = -1$
- $\boxed{9}$ se γ è una curva semplice da $(0,0,0)$ a $(-1,-1,-1)$, allora $L_\gamma(\mathbf{F}) = -5/2$
- $\boxed{10}$ se γ è una curva semplice da $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$, allora $L_\gamma(\mathbf{F}) = 5/2$

---

5. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) L'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' - 5y' + 4y = 8$ è

$y(x) =$

---

6. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = (x^2-y^2-z^2, x^2-y^2+z^2, x^2+y^2-z^2)$ attraverso la superficie del cubo $\mathrm{Q} = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ orientato positivamente.

   $\Phi_{\mathrm{Q}}(\mathbf{F}) =$

---

7. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri la serie di potenze $f(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$ e il suo raggio di convergenza r. Allora

$\boxed{1}$ $r = 0$	$\boxed{4}$ $f(x) = \cos x$	$\boxed{7}$ $f(x) = \sinh x$	$\boxed{10}$ $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$
$\boxed{2}$ $r = 1$	$\boxed{5}$ $f(x) = \cosh x$	$\boxed{8}$ $f(x) = \mathrm{e}^x$	$\boxed{11}$ $f(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1$
$\boxed{3}$ $r = +\infty$	$\boxed{6}$ $f(x) = \sin x$	$\boxed{9}$ $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$	$\boxed{12}$ $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 1$

---

8. (Domanda a risposta singola, 4 punti) Si consideri l'integrale complesso $I = \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{-\pi z}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$, dove la curva $\gamma\,:\,|z - \mathrm{i}| = 1$ è orientata positivamente. Allora I vale

(1) 0	(3) 1	(5) i	(7) π	(9) $\pi\mathrm{i}$	(11) 2π	(13) $2\pi\mathrm{i}$
(2) $+\infty$	(4) -1	(6) $-\mathrm{i}$	(8) $-\pi$	(10) $-\pi\mathrm{i}$	(12) -2π	(14) $-2\pi\mathrm{i}$

Domande teoriche (6 punti)

1. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Enunciare il teorema del gradiente per una funzione di più variabili.

2. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Scrivere l'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del primo ordine.

3. (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Scrivere l'identità di Parseval.