

Cognome: _____

Matricola: _____

Nome: _____

Punteggio Totale: _____

Istruzioni. Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

Tempo. 1 ora e 30 minuti.

QUESTIONARIO (27 punti)

1. (Domanda a risposta multipla, 4 punti) Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = \log(2 - x^2 - y^2)$. Allora

- | | |
|---|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> $f(\mathbf{x}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$ | <input type="checkbox"/> f possiede un solo punto di minimo |
| <input type="checkbox"/> $f(\mathbf{x}) \leq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$ | <input type="checkbox"/> f possiede infiniti punti di massimo |
| <input type="checkbox"/> f non possiede punti di massimo | <input checked="" type="checkbox"/> f possiede infiniti punti di minimo |
| <input type="checkbox"/> f non possiede punti di minimo | <input type="checkbox"/> f possiede almeno un punto di massimo su $\partial\Omega$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> f possiede un solo punto di massimo | <input checked="" type="checkbox"/> f possiede almeno un punto di minimo su $\partial\Omega$ |

2. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la trasformazione $F(x, y) = (x^2 + 2y, 2x + y^2)$. Allora F

- | | |
|---|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> è di classe \mathcal{C}^1 su tutto \mathbb{R}^2 | <input type="checkbox"/> possiede infiniti punti singolari che si dispongono lungo una circonferenza |
| <input type="checkbox"/> è localmente invertibile su tutto \mathbb{R}^2 | <input type="checkbox"/> possiede infiniti punti singolari che si dispongono lungo una parabola |
| <input type="checkbox"/> è globalmente invertibile su tutto \mathbb{R}^2 | <input checked="" type="checkbox"/> possiede infiniti punti singolari che si dispongono lungo un'iperbole |
| <input type="checkbox"/> non possiede punti singolari | |
| <input type="checkbox"/> possiede esattamente un punto singolare | |

3. (Domanda a risposta singola, 3 punti) Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 0\}$. L'integrale doppio $I = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2)^2 dx dy$ vale

- ① 1 ② -1 ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $-\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\frac{\pi}{4}$ ⑥ $-\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{6}$ ⑧ $-\frac{\pi}{6}$

4. (Domanda a risposta multipla, 4 punti) Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F} = (x + y + z, x - y + z, x + y - z)$. Allora

- | | |
|--|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> \mathbf{F} è irrotazionale | <input type="checkbox"/> $\operatorname{div} \mathbf{F} = 1$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> \mathbf{F} è conservativo | <input checked="" type="checkbox"/> $\operatorname{div} \mathbf{F} = -1$ |
| <input type="checkbox"/> \mathbf{F} non possiede funzioni potenziali | <input type="checkbox"/> se γ è una curva semplice da $(0, 0, 0)$ a $(-1, -1, -1)$, allora $L_{\gamma}(\mathbf{F}) = -5/2$ |
| <input type="checkbox"/> \mathbf{F} possiede una sola funzione potenziale | <input checked="" type="checkbox"/> se γ è una curva semplice da $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$, allora $L_{\gamma}(\mathbf{F}) = 5/2$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> \mathbf{F} possiede infinite funzioni potenziali | |
| <input type="checkbox"/> $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ | |

5. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) L'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' - 5y' + 4y = 8$ è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x} + 2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

6. (Domanda a risposta aperta, 3 punti) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = (x^2 - y^2 - z^2, x^2 - y^2 + z^2, x^2 + y^2 - z^2)$ attraverso la superficie del cubo $Q = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ orientato positivamente.

$$\Phi_Q(\mathbf{F}) = -1$$

7. (Domanda a risposta multipla, 3 punti) Si consideri la serie di potenze $f(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$ e il suo raggio di convergenza r . Allora

- | | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------|----------------------------|------------------|----------------------------|------------------|--|---------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | $r = 0$ | <input type="checkbox"/> 4 | $f(x) = \cos x$ | <input type="checkbox"/> 7 | $f(x) = \sinh x$ | <input type="checkbox"/> 10 | $f(x) = e^x - 1$ |
| <input type="checkbox"/> 2 | $r = 1$ | <input type="checkbox"/> 5 | $f(x) = \cosh x$ | <input type="checkbox"/> 8 | $f(x) = e^x$ | <input checked="" type="checkbox"/> 11 | $f(x) = e^{-x} - 1$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 3 | $r = +\infty$ | <input type="checkbox"/> 6 | $f(x) = \sin x$ | <input type="checkbox"/> 9 | $f(x) = e^{-x}$ | <input type="checkbox"/> 12 | $f(x) = e^{-x} + 1$ |
-

8. (Domanda a risposta singola, 4 punti) Si consideri l'integrale complesso $I = \int_{\gamma} \frac{e^{-\pi z}}{z^2 + 1} dz$, dove la curva $\gamma : |z - i| = 1$ è orientata positivamente. Allora I vale

- | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------------------|-----------|----------------------------|----|----------------------------|----|---------------------------------------|--------|-----------------------------|----------|-----------------------------|---------|-----------------------------|-----------|
| <input type="checkbox"/> 1 | 0 | <input type="checkbox"/> 3 | 1 | <input type="checkbox"/> 5 | i | <input type="checkbox"/> 7 | π | <input type="checkbox"/> 9 | πi | <input type="checkbox"/> 11 | 2π | <input type="checkbox"/> 13 | $2\pi i$ |
| <input type="checkbox"/> 2 | $+\infty$ | <input type="checkbox"/> 4 | -1 | <input type="checkbox"/> 6 | -i | <input checked="" type="checkbox"/> 8 | $-\pi$ | <input type="checkbox"/> 10 | $-\pi i$ | <input type="checkbox"/> 12 | -2π | <input type="checkbox"/> 14 | $-2\pi i$ |
-

DOMANDE TEORICHE (6 punti)

- (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Enunciare il teorema del gradiente per una funzione di più variabili.
- (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Scrivere l'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del primo ordine.
- (Domanda a risposta aperta, 2 punti) Scrivere l'identità di Parseval.