Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — *Primo compito in itinere – 6 Novembre 2023*

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________ **Punteggio Totale:** ____________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora.*

Questionario (26 punti)

(☐ domanda a risposta multipla, ◯ domanda a risposta singola)

1. (5 punti) La funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- [1] è continua in $(0,0)$
- [2] è derivabile in $(0,0)$
- [3] è derivabile in $(0,0)$ lungo ogni versore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$
- [4] è differenziabile in $(0,0)$
- [5] è di classe $\mathcal{C}^1$ su $\mathbb{R}^2$
- [6] ammette $(0,0)$ come punto critico
- [7] ammette $(0,0)$ come punto di minimo assoluto
- [8] ammette $(0,0)$ come punto di massimo assoluto
- [9] ammette $(0,0)$ come punto di sella
- [10] non si annulla mai

---

2. (4 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x^2 \mathrm{e}^y + y^2 \mathrm{e}^{-y}$. Determinare i punti critici di f e stabilirne la natura.

---

3. (3 punti) Sia g la funzione definita implicitamente dall'equazione

$$\mathrm{e}^{x+y} - \cos x + \sin y = 0$$

in un opportuno intorno del punto $(0,0)$. Allora $g'(0)$ è

(1) 0 (2) -1 (3) 1 (4) -2 (5) 2 (6) $\frac{1}{2}$ (7) $-\frac{1}{2}$

---

4. (3 punti) La funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definita da $F(x,y) = (x^2\mathrm{e}^y, y^2\mathrm{e}^x)$,

- [1] è localmente invertibile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$
- [2] possiede solo un numero finito di punti in cui non è localmente invertibile
- [3] possiede infiniti punti in cui non è localmente invertibile
- [4] è tale che il punto $(0,0)$ ammette una sola controimmagine
- [5] è iniettiva
- [6] non è suriettiva
- [7] non è globalmente invertibile

---

5. (3 punti) Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da $F(x,y) = (xy, x^2+y^2, x^2-y^2)$. Siano $\mathbf{x}_0 = (1,-1)$ e $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. La derivata direzionale di f lungo $\mathbf{v}$ in $\mathbf{x}_0$ è data da

(1) $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = 0$
(2) $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \sqrt{2}$
(3) $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = -\sqrt{2}$
(4) $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = (2\sqrt{2}, \sqrt{2})$
(5) $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
(6) $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
(7) $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$
(8) $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$
(9) $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = (0, -2\sqrt{2}, \sqrt{2})$

---

6. (4 punti) L'integrale doppio

$$I = \iint_\Omega \frac{x\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \geq 0\,,\; y \geq 0\,,\; y \leq x\,,\; 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\}$, vale

① 1 ② e ③ $\dfrac{\mathrm{e}(\mathrm{e}+1)}{2\sqrt{2}}$ ④ $\dfrac{\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)}{2\sqrt{2}}$ ⑤ $\dfrac{\mathrm{e}(\mathrm{e}^3-1)}{2\sqrt{2}}$ ⑥ $\dfrac{\mathrm{e}(\mathrm{e}^3-1)}{4\sqrt{2}}$

---

7. (4 punti) Determinare i vettori della terna intrinseca nel punto $P \equiv (0,1,1)$ della curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t + t\,\mathrm{e}^t \\ y = 1 - t\,\mathrm{e}^t \\ z = t + \mathrm{e}^t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Domande teoriche (6 punti)

1. (2 punti) Enunciare il teorema della composizione di funzioni differenziabili nel caso delle funzioni vettoriali a più variabili. In particolare, dire come è fatta la matrice jacobiana della funzione composta.

2. (2 punti) Dare la definizione di regione y-semplice e scrivere la formula di riduzione per un integrale doppio su una regione Ω y-semplice.

3. (2 punti) Scrivere la definizione di integrale di linea (di prima specie).