Analisi Matematica II — *Primo compito in itinere – 6 Novembre 2023*

**Cognome:** ____________________ **Matricola:** ____________________

**Nome:** ____________________ **Punteggio Totale:** ____________________

**Istruzioni.** *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

**Tempo.** *1 ora.*

## Questionario (26 punti)

(☐ domanda a risposta multipla, ◯ domanda a risposta singola)

1. (5 punti) La funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- [x] 1 è continua in $(0,0)$
- [x] 2 è derivabile in $(0,0)$
- [x] 3 è derivabile in $(0,0)$ lungo ogni versore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$
- [ ] 4 è differenziabile in $(0,0)$
- [ ] 5 è di classe $\mathcal{C}^1$ su $\mathbb{R}^2$
- [x] 6 ammette $(0,0)$ come punto critico
- [ ] 7 ammette $(0,0)$ come punto di minimo assoluto
- [ ] 8 ammette $(0,0)$ come punto di massimo assoluto
- [x] 9 ammette $(0,0)$ come punto di sella
- [ ] 10 non si annulla mai

2. (4 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x^2 e^y + y^2 e^{-y}$. Determinare i punti critici di $f$ e stabilirne la natura.

$(0,0)$ minimo, $(0,2)$ sella

3. (3 punti) Sia $g$ la funzione definita implicitamente dall'equazione

$$e^{x+y} - \cos x + \sin y = 0$$

in un opportuno intorno del punto $(0,0)$. Allora $g'(0)$ è

① $0$ ② $-1$ ③ $1$ ④ $-2$ ⑤ $2$ ⑥ $\frac{1}{2}$ ⑦ ✓ $-\frac{1}{2}$

4. (3 punti) La funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definita da $F(x,y) = (x^2 e^y, y^2 e^x)$,

- [ ] 1 è localmente invertibile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$
- [ ] 2 possiede solo un numero finito di punti in cui non è localmente invertibile
- [x] 3 possiede infiniti punti in cui non è localmente invertibile
- [x] 4 è tale che il punto $(0,0)$ ammette una sola controimmagine
- [ ] 5 è iniettiva
- [x] 6 non è suriettiva
- [x] 7 non è globalmente invertibile

5. (3 punti) Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da $F(x,y) = (xy, x^2+y^2, x^2-y^2)$. Siano $\mathbf{x}_0 = (1,-1)$ e $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. La derivata direzionale di $f$ lungo $\mathbf{v}$ in $\mathbf{x}_0$ è data da

① $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = 0$
② $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \sqrt{2}$
③ $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = -\sqrt{2}$
④ $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = (2\sqrt{2}, \sqrt{2})$
⑤ $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
⑥ $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
⑦ ✓ $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$
⑧ $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$
⑨ $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = (0, -2\sqrt{2}, \sqrt{2})$

6. (4 punti) L'integrale doppio

$$I = \iint_\Omega \frac{x\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ y \leq x\,,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\}$, vale

① $1$ ② $\mathrm{e}$ ③ $\dfrac{\mathrm{e}(\mathrm{e}+1)}{2\sqrt{2}}$ ④ $\dfrac{\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)}{2\sqrt{2}}$ ⑤ $\dfrac{\mathrm{e}(\mathrm{e}^3-1)}{2\sqrt{2}}$ ⑥ $\dfrac{\mathrm{e}(\mathrm{e}^3-1)}{4\sqrt{2}}$

---

7. (4 punti) Determinare i vettori della base intrinseca nel punto $P \equiv (0,1,1)$ della curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t + t\,\mathrm{e}^t \\ y = 1 - t\,\mathrm{e}^t \\ z = t + \mathrm{e}^t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

$\mathbf{t}(0) = \dfrac{(2,-1,2)}{3}, \quad \mathbf{n}(0) = \dfrac{(2,-10,-7)}{3\sqrt{17}}, \quad \mathbf{b}(0) = \dfrac{(3,2,-2)}{\sqrt{17}}$

---

## Domande teoriche (6 punti)

1. (2 punti) Enunciare il teorema della composizione di funzioni differenziabili nel caso delle funzioni vettoriali a più variabili. In particolare, dire come è fatta la matrice jacobiana della funzione composta.

2. (2 punti) Dare la definizione di regione $y$-semplice e scrivere la formula di riduzione per un integrale doppio su una regione $\Omega$ $y$-semplice.

3. (2 punti) Scrivere la definizione di integrale di linea (di prima specie).