Analisi Matematica II — *Secondo compito in itinere – 11 Gennaio 2024*

**Cognome:** ______________________ **Matricola:** ______________________

**Nome:** ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

**Istruzioni.** *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

**Tempo.** *1 ora.*

## Questionario (26 punti)

(☐ domanda a risposta multipla, ◯ domanda a risposta singola)

1. (3 punti) Determinare il valore del parametro reale $a$ in modo che il campo $\mathbf{F} = \left( \dfrac{axy^2}{1+x^2y^2}, \dfrac{x^2y}{1+x^2y^2} \right)$ sia conservativo.

   $a =$

2. (4 punti) L'area della superficie

$$\Sigma : \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u \sin v \\ z = u \end{cases} \qquad (u,v) \in \Omega \,,$$

   dove $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u^2 + v^2 < 2 \,, \ u > 0\}$, è

   ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 1/2 ⑤ 2/3 ⑥ 3/2 ⑦ 3/8 ⑧ 8/3

3. (4 punti) Il valore assoluto del lavoro del campo $\mathbf{F} = (3y + z, x - z, 3x + y)$ lungo la curva

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

   è $|L_\gamma(\mathbf{F})| =$

4. (4 punti) Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Determinare il valore del parametro $a$ in modo che il flusso del campo $\mathbf{F} = (x^2 \sin y, 2x\cos y, x^2 + y^2 + z^2)$ attraverso la superficie $\Sigma = \partial P$ data dal bordo del cubo $Q = [0,a] \times [0,a] \times [0,a]$, orientata positivamente, sia $\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = 4$.

   $a =$

5. (4 punti) Sia $f$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{2}(1 + y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   e sia $I$ l'intervallo massimale su cui $f$ è definita. Sia $f(x) = F(x) + o(x^2)$ per $x \to 0$. Allora

   - [1] $f$ è strettamente crescente
   - [2] $f$ è strettamente decrescente
   - [3] $f$ non è monotona
   - [4] $F(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$
   - [5] $F(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2$
   - [6] $F(x) = 1 + \frac{1}{2}x + x^2$
   - [7] $F(x) = 1 + \frac{1}{2}x - x^2$
   - [8] $I = \mathbb{R}$
   - [9] $I = \left( -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right)$
   - [10] $I = \left( -\dfrac{3}{2}\pi, \dfrac{\pi}{2} \right)$
   - [11] $I = \left( -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi \right)$

6. (3 punti) Il raggio di convergenza della serie reale $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n n!}{n^n}\, x^n$ è

① $0$ ② $1$ ③ $2$ ④ $\mathrm{e}$ ⑤ $\mathrm{e}/2$ ⑥ $2/\mathrm{e}$ ⑦ $2\mathrm{e}$ ⑧ $+\infty$

---

7. (4 punti) Sia $I = \displaystyle\int_\gamma \frac{z\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}z}}{z^2+9}\,\mathrm{d}z$, dove $\gamma$ è la curva $|z-4| = 6$, orientata positivamente. Allora

① $0$ ② $1$ ③ $2\pi$ ④ $-2\pi$ ⑤ $2\mathrm{i}$ ⑥ $-2\mathrm{i}$ ⑦ $2\pi\mathrm{i}$ ⑧ $-2\pi\mathrm{i}$

---

## Domande teoriche (7 punti)

1. (2 punti) Enunciare il teorema di Gauss-Green nel piano.

2. (2 punti) Enunciare il teorema di esistenza e unicità della soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del secondo ordine.

3. (3 punti) Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.

- [1] $f$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su $\mathbb{C}$
- [2] $f$ è una funzione intera
- [3] se $f$ è limitata, allora $f$ è costante
- [4] $f$ non può essere limitata
- [5] $\operatorname{Re} f(z)$ è una funzione armonica
- [6] $|f(z)|$ è una funzione armonica
- [7] l'equazione $f(z) = 0$ ammette sempre almeno una soluzione
- [8] $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ per ogni curva chiusa $\gamma$
- [9] $\int_\gamma f(z^2\mathrm{e}^z)\,\mathrm{d}z = 0$ per ogni curva chiusa $\gamma$
- [10] $\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = 0$ per ogni curva chiusa $\gamma$
- [11] $\operatorname{Res}(f(z), z_0) = 0$ per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$
- [12] $\operatorname{Res}(f(z), z_0) = 2\pi\mathrm{i}$ per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$
- [13] $f$ è sviluppabile in serie di Taylor in ogni punto $z_0 \in \mathbb{C}$

# DOMANDE TEORICHE (RECUPERO)

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili e sia $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. Allora

$\boxed{1}$ $f$ continua in $\mathbf{x}_0 \Rightarrow f$ derivabile in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{2}$ $f$ derivabile in $\mathbf{x}_0 \Rightarrow f$ continua in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{3}$ $f$ continua in $\mathbf{x}_0 \Rightarrow f$ differenziabile in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{4}$ $f$ differenziabile in $\mathbf{x}_0 \Rightarrow f$ continua in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{5}$ $f$ derivabile in $\mathbf{x}_0 \Rightarrow f$ differenziabile in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{6}$ $f$ differenziabile in $\mathbf{x}_0 \Rightarrow f$ derivabile in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{7}$ $f$ possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0 \Rightarrow f$ continua in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{8}$ $f$ continua in $\mathbf{x}_0 \Rightarrow f$ possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{9}$ $f$ possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0 \Rightarrow f$ derivabile in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{10}$ $f$ derivabile in $\mathbf{x}_0 \Rightarrow f$ possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{11}$ $f$ possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0 \Rightarrow f$ differenziabile in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{12}$ $f$ differenziabile in $\mathbf{x}_0 \Rightarrow f$ possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$

$\boxed{13}$ $f$ differenziabile in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$

$\boxed{14}$ $f$ di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f$ differenziabile in $\mathbb{R}^2$

2. Enunciare il teorema di Schwarz per le derivate miste.

3. Scrivere la massa totale e le coordinate del baricentro di una curva regolare $\gamma \in \mathbb{R}^2$ munita di densità lineare di massa $\delta$.