

Cognome: _____

Matricola: _____

Nome: _____

Punteggio Totale: _____

Istruzioni. Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

Tempo. 1 ora e 15 minuti.

QUESTIONARIO (27 punti)

(domanda a risposta multipla, domanda a risposta singola)

1. (3 punti) La funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1 è continua in $(0, 0)$

4 è differenziabile in $(0, 0)$

2 è derivabile in $(0, 0)$

5 è di classe C^1 su \mathbb{R}^2

3 è derivabile in $(0, 0)$ lungo ogni versore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$

6 ammette $(0, 0)$ come punto critico

2. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = x^2 e^x + y^2 e^{-y}$. Determinare i punti critici di f e stabilirne la natura.

3. (3 punti) L'area della superficie

$$\Sigma : \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u \end{cases} \quad (u, v) \in \Omega,$$

dove $\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 2, u > 0\}$, è

1 0

2 1

3 2

4 $1/2$

5 $2/3$

6 $3/2$

7 $3/8$

8 $8/3$

4. (4 punti) Il valore assoluto del lavoro del campo $\mathbf{F} = (3y + z, x - z, 3x + y)$ lungo la curva

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

è $|L_\gamma(\mathbf{F})| =$

5. (4 punti) Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Determinare il valore del parametro a in modo che il flusso del campo $\mathbf{F} = (x^2 \sin y, 2x \cos y, x^2 + y^2 + z^2)$ attraverso la superficie $\Sigma = \partial Q$ data dal bordo del cubo $Q = [0, a] \times [0, a] \times [0, a]$, orientata positivamente, sia $\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = 4$.

$a =$

6. (3 punti) Il raggio di convergenza della serie reale $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n n!}{n^n} x^n$ è

1 0

2 1

3 2

4 e

5 $e/2$

6 $2/e$

7 $2e$

8 $+\infty$

7. (3 punti) Sia f la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2}(1 + y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e sia I l'intervallo massimale su cui f è definita. Sia $f(x) = F(x) + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$. Allora

- | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------|----------------------------|---------------------------------|-----------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> 1 | f è strettamente crescente | <input type="checkbox"/> 5 | $F(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2$ | <input type="checkbox"/> 9 | $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ |
| <input type="checkbox"/> 2 | f è strettamente decrescente | <input type="checkbox"/> 6 | $F(x) = 1 + \frac{1}{2}x + x^2$ | <input type="checkbox"/> 10 | $I = \left(-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ |
| <input type="checkbox"/> 3 | f non è monotona | <input type="checkbox"/> 7 | $F(x) = 1 + \frac{1}{2}x - x^2$ | <input type="checkbox"/> 11 | $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ |
| <input type="checkbox"/> 4 | $F(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ | <input type="checkbox"/> 8 | $I = \mathbb{R}$ | | |

8. (4 punti) Sia $I = \int_{\gamma} \frac{ze^{\frac{\pi}{3}z}}{z^2+9} dz$, dove γ è la curva $|z-4|=6$, orientata positivamente. Allora

- 1 0 2 1 3 2π 4 -2π 5 $2i$ 6 $-2i$ 7 $2\pi i$ 8 $-2\pi i$

DOMANDE TEORICHE (6 punti)

1. (1.5 punti) Definire i versori della terna intrinseca di una curva biregolare.

2. (1.5 punti) Enunciare il teorema di esistenza e unicità della soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del secondo ordine.

3. (3 punti) Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.

- | | | | |
|----------------------------|--|-----------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> 1 | f è di classe \mathcal{C}^∞ su \mathbb{C} | <input type="checkbox"/> 8 | $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ per ogni curva chiusa γ |
| <input type="checkbox"/> 2 | f è una funzione intera | <input type="checkbox"/> 9 | $\int_{\gamma} f(z^2 e^z) dz = 0$ per ogni curva chiusa γ |
| <input type="checkbox"/> 3 | se f è limitata, allora f è costante | <input type="checkbox"/> 10 | $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^2+1} dz = 0$ per ogni curva chiusa γ |
| <input type="checkbox"/> 4 | f non può essere limitata | <input type="checkbox"/> 11 | $\text{Res}(f(z), z_0) = 0$ per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$ |
| <input type="checkbox"/> 5 | $\text{Re } f(z)$ è una funzione armonica | <input type="checkbox"/> 12 | $\text{Res}(f(z), z_0) = 2\pi i$ per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$ |
| <input type="checkbox"/> 6 | $ f(z) $ è una funzione armonica | <input type="checkbox"/> 13 | f è sviluppabile in serie di Taylor in ogni punto $z_0 \in \mathbb{C}$ |
| <input type="checkbox"/> 7 | l'equazione $f(z) = 0$ ammette sempre almeno una soluzione | | |